ABAQUES DONNANT LA FIGURE D'ÉQUILIBRE ET LES TENSIONS DANS UN CABLE SOUMIS A UN COURANT PERMANENT UNIFORME

PAR
M. BRACONNOT *

Introduction

On a étudié la figure d'équilibre et la répartition des tensions dans un câble souple soumis à un courant permanent uniforme. Cette étude a conduit à la réalisation d'un calcul numérique reposant sur un certain nombre d'hypothèses relatives en particulier à la nature de l'action du courant sur le câble. Les résultats de ce calcul ont été traduits en abaques adimensionnels.

Hypothèses et méthode de calcul

On a supposé que :

— le régime est permanent, ni la position ni la vitesse du courant n'évoluent en fonction du temps;

— la figure d'équilibre est plane, tout le câble est dans le plan vertical défini par la vitesse du courant;

— le câble est infiniment souple;

— la répartition de vitesse est uniforme le long de la verticale;

— la force hydrodynamique se réduit à une force de traînée normale au câble et proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse :

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\, \rho_0 C_x\, d.ds\, |\vec{V}_N|\, \vec{V}_N$$

où ρ_0 est la masse spécifique de l'eau,
C_x un coefficient de traînée;
d le diamètre du câble;
ds la longueur élémentaire du câble;
V_N la composante normale de la vitesse;

— la force due au frottement tangentiel de l'eau le long du câble est négligeable;

— dans le calcul, le câble, est représenté par une courbe, chaque section se réduisant à un point.

Dans ces conditions, en écrivant qu'un élément de câble de longueur ds est en équilibre, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \cos\varphi \\ \frac{dz}{ds} &= \sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\varpi}{T}\left(\cos\varphi + \frac{\rho_0 C_x d V^2}{2\,\varpi}\,|\sin\varphi|\,\sin\varphi\right) \\ \frac{dT}{ds} &= \varpi \sin\varphi \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

en projection sur des axes Oy horizontal dans le sens de la vitesse du courant et Oz vertical et où :

y, z sont les coordonnées d'un point du câble;
s l'abscisse curviligne le long du câble;
φ l'angle que fait le câble (s croissant) avec le vecteur vitesse (horizontal);
ϖ le poids linéique du câble sous l'eau :

$$\varpi = \frac{\pi d^2}{4}\,(\rho - \rho_0)\, g;$$

T la tension du câble;
ρ_0 la masse spécifique de l'eau;
V la vitesse du courant;
d le diamètre du câble;
C_x le coefficient de traînée.

Les abaques ont été obtenus par la résolution numérique de ce système.

* Electricité de France, Centre de Recherches et d'Essais de Chatou

Présentation des abaques

Pour obtenir une plus grande généralité d'emploi on a rendu adimensionnel le système (1) en rapportant :

— les longueurs à la profondeur H_0,

— et les tensions à la force ϖH_0;

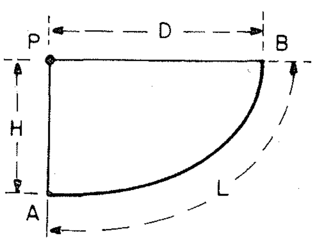
et on a appelé K le coefficient $\rho_0 C_x d V^2/2\varpi$ qui caractérise le câble et le courant dans lequel il est placé.

Il se trouve alors que, pour une valeur déterminée du coefficient K, c'est-à-dire pour un câble et un courant donnés, tous les cas de figure possibles sont représentés par une seule courbe en grandeurs adimensionnelles. La connaissance de H_0 et des conditions aux extrémités du câble définissent la partie de la figure à utiliser.

Les abaques reproduisent la courbe adimensionnelle pour les quatre valeurs de K :

0, 0,15, 0,6 et 2,4

K = 0 correspond à l'absence de courant, on retrouve la chaînette, figure d'équilibre d'un fil pesant soumis uniquement à son propre poids.



Les abaques sont complétés par le tracé des courbes auxiliaires permettant de rechercher un cas de figure particulier défini par des conditions aux extrémités du câble : il s'agit des lieux des points P sommet de l'angle droit défini par l'horizontale passant par l'extrémité B la plus haute du câble et la verticale passant par l'extrémité la plus basse A tels que les rapports :

$$L/H \qquad D/H \qquad \text{et} \qquad T_A/\varpi H$$

aient les valeurs déterminées,

où L est la longueur de câble soumise au courant;

H est la différence de profondeur des deux extrémités du câble;

D est la distance horizontale entre les deux extrémités du câble;

T_A est la tension à l'extrémité A la plus basse du câble.

On utilise aussi la relation $T_B = T_A + \varpi H$ qui lie les tensions T_B et T_A en deux points quelconques du câble et résultant de l'intégration directe des équations 2 et 4 du système (1).

Emploi des abaques

On peut lire sur les abaques, après avoir convenablement placé les extrémités A et B du câble, les grandeurs suivantes :

— longueur du câble :

$$L = H_0 (s'_B - s'_A);$$

— distance verticale entre 2 points du câble :

$$H = H_0 (z'_B - z'_A);$$

— distance horizontale entre 2 points du câble :

$$D = H_0 (y'_B - y'_A);$$

— tension en chaque point du câble :

$$T = \varpi H_0 (1 + z'),$$

(cette relation résulte de la relation :

$T_B = T_A + \varpi H$ et du choix des conditions initiales du calcul);

— angle du câble avec l'horizontale en chaque point : φ.

La longueur s' et l'angle φ font l'objet des deux graduations portées le long de la courbe; les coordonnées horizontale y' et verticale z' sont graduées sur les axes.

Pour obtenir dans un cas particulier la figure d'équilibre et les tensions correspondantes il suffit de placer sur l'abaque les deux points A et B et de déterminer H_0. Un cas de figure, correspondant à un câble de longueur finie, est défini par trois des grandeurs.

$$\varphi_A, \quad \varphi_B, \quad T_A, \quad T_B, \quad H, \quad D, \quad L$$

Soit 35 types de cas de figure schématisés au tableau 1; 8 de ces cas types ne sont pas traitables directement sur les abaques, mais ce sont des cas relativement peu intéressants en pratique; les 27 autres se ramènent aux 5 traitements suivants :

a) *Cas où l'on connaît les deux angles φ_A et φ_B :*

On place les points A et B sur la courbe par la graduation en φ; la troisième grandeur T_A, T_B, H, D ou L donne H_0 par exemple :

$$H_0 = \frac{D}{y'_B - y'_A}$$

b) *Cas où l'on connaît un angle, la distance verticale H, et une autre grandeur :*

L'angle permet de placer l'extrémité A (ou B) du câble; un des lieux L/H, D/H ou $T_A/\varpi H$ permet de placer l'autre extrémité B (ou A). En effet l'intersection de la verticale A (ou l'horizontale de B) avec ce lieu donne le point P, et le point B (ou A) cherché se trouve à l'intersection de la courbe par l'horizontale (ou la verticale) de P; la valeur de H_0 est déterminée à partir de H :

$$H_0 = \frac{H}{z'_B - z'_A}$$

c) *Cas où l'on connaît la distance verticale H et deux autres grandeurs :*

La position du point P, donc des points A et B, est obtenue par l'intersection de deux des lieux L/H, D/H, $T_A/\varpi H$; la valeur de H_0 est déterminée à partir de H :

$$H_0 = \frac{H}{z'_B - z'_A}$$

d) *Cas où on connait un angle et la tension à une extrémité du câble et une autre grandeur :*

L'angle permet de placer le point A (ou B) sur la courbe; la tension permet de déterminer la valeur de H_0 :

$$H_0 = \frac{T_A}{\varpi(1 + z'_A)} \quad \left(\text{ou } \frac{T_B}{\varpi(1 + z'_B)}\right)$$

Une des relations :

$$D = H_0 (y'_B - y'_A), \qquad L = H_0 (s_B' - s'_A),$$
$$T_A = \varpi H_0 (1 + z'_A) \qquad [\text{ou } T_B = \varpi H_0 (1 + z'_B)]$$

permet de déterminer le point B (ou A) par la valeur correspondante de y', s' ou z'.

e) *Cas où on connaît la tension aux deux extrémités et une autre grandeur :*

On se ramène au cas *c*, puisque dans ces conditions la profondeur H est définie par la relation :

$$T_B = T_A + \varpi H$$

Tableau I

	φ_A	φ_B	T_A	T_B	H	D	L	Cas
1	×	×	×					*a*
2	×	×		×				*a*
3	×	×			×			*a*
4	×	×				×		*a*
5	×	×					×	*a*
6	×		×	×				*d*
7	×		×		×			*b*
8	×		×			×		*d*
9	×		×				×	*d*
10	×			×	×			*b*
11	×			×		×		*o*
12	×			×			×	*o*
13	×				×	×		*b*
14	×				×		×	*b*
15	×					×	×	*o*
16		×	×	×				*d*
17		×	×		×			*b*
18		×	×			×		*o*
19		×	×				×	*o*
20		×		×	×			*b*
21		×		×		×		*d*
22		×		×			×	*d*
23		×			×	×		*b*
24		×			×		×	*b*
25		×				×	×	*o*
26			×	×	×			*c*
27			×	×		×		*e*
28			×	×			×	*e*
29			×		×	×		*c*
30			×		×		×	*c*
31			×			×	×	*o*
32				×	×	×		*c*
33				×	×		×	*c*
34				×		×	×	*o*
35					×	×	×	*c*

Les cas marqués *o* ne sont pas traitables directement avec les abaques faisant l'objet de cette note.

f) *Autres cas :*

Les cas non indiqués ci-dessus peuvent être traités (au moins pour six d'entre eux) en utilisant les points d'intersection des lieux L/H, D/H et $T_A/\varpi H$.

Exemples d'utilisation des abaques

Ancrage d'une bouée :

Soit un courant d'environ 3 nœuds (1,50 m/s), une profondeur de 20 m. On veut mouiller une bouée au moyen d'un corps mort et d'un câble de 1 cm de diamètre pesant 5 N/m sous l'eau. Supposons que la bouée soit telle que l'action combinée de la poussée d'Archimède et de la traînée due au courant donne une force T_B égale à 350 N, faisant un angle de 75° avec l'horizontale. Quelle est la longueur de câble nécessaire? A quelle distance du corps mort se trouvera la bouée? Quel effort subira le corps-mort? etc.

A partir des caractéristiques du câble et de la donnée du courant, en prenant $C_x = 1{,}2$ on trouve $K = 2{,}7$. On utilise l'abaque $K = 2{,}4$ qui pour ce câble correspond à une vitesse de courant de 1,41 m/s très voisine de la vitesse imposée (en général on ne connaît pas la vitesse avec une telle précision).

Les conditions imposées sont :

$$\varphi_B = 75° \qquad T_B = 350\ \text{N} \qquad H = 20\ \text{m}$$

On place le point B sur la courbe (planche 4) par $\varphi_B = 75°$. La tension au corps-mort est :

$$T_A = T_B - \varpi H = 250\ \text{N}$$

d'où :

$$T_A/\varpi H = 250/100 = 2{,}5.$$

Le point P se trouve à l'intersection de l'horizontale de B et du lieu $T_A/\varpi H = 2{,}5$. Le point A est alors déterminé par la verticale de P.

On lit sur l'abaque :

$$z'_B = 0{,}5 \qquad z'_A = 0{,}07$$
$$y'_B = 0{,}75 \qquad y'_A = 0{,}35$$
$$s'_B = 0{,}97 \qquad s'_A = 0{,}36$$

On en déduit :

$$H_0 = \frac{H}{z'_B - z'_A} = \frac{20}{0{,}43} = 46{,}5\ \text{m}$$

d'où :

$$L = (s'_B - s'_A)\ H_0 = 46{,}5 \times 0{,}61 = 28{,}3\ \text{m}$$
$$D = (y'_B - y'_A)\ H_0 = 46{,}5 \times 0{,}40 = 18{,}5\ \text{m}$$

Il faudra donc 28,3 m de câble; la bouée sera à 18,5 m à l'aval du corps-mort; le câble tirera sur le corps-mort avec une force de 250 N faisant avec l'horizontale l'angle φ_A de 22°.

Remorquage d'un engin immergé :

Pour faire des mesures en mer, on immerge un engin au moyen d'un câble léger de 1 cm de diamètre pesant 0,5 N/m sous l'eau, la vitesse relative du bateau par rapport à l'eau est d'environ 1 nœud. On peut mesurer au bateau la longueur de câble filée, l'angle que fait le câble avec l'horizontale à son entrée dans l'eau, et la tension du câble au même point. A quelle profondeur se trouve l'engin de mesure?

On utilise l'abaque $K = 2{,}4$ qui correspond pour ce câble à la vitesse du courant de 0,45 m/s, voisine de la vitesse imposée.

Supposons que l'on ait mesuré un angle de 40°, une tension de 100 N et que l'on ait filé 100 m de câble. L'angle φ_B, angle du câble avec le vecteur vitesse du courant est dans ces conditions de 140°; on place alors le point B sur la courbe (planche 5) et obtient :

$$z'_B = 23$$

d'où on déduit :

$$H_0 = \frac{T_B}{\varpi\,(1 + z'_B)} = \frac{100}{0{,}5\,.\,24} = 83{,}4\ \text{m}$$

La condition $L = 100$ m permet d'obtenir :

$$s'_B - s'_A = \frac{L}{H_0}$$

$$s'_B - s'_A = \frac{100}{83{,}4} = 1{,}2$$

On lit sur l'abaque $s'_B = 3{,}25$, donc $s'_A = 2{,}05$, ce qui permet de placer le point A, où on lit $z'_A = 14{,}7$.

La profondeur de l'engin est donc :

$$H = H_0\,(z'_B - z'_A) = 83{,}4\,(23 - 14{,}7) = 69{,}5\ \text{m}$$

NOTA. — Des abaques pour des valeurs plus grandes de K seront tracés ultérieurement.

ABAQUES

POUR LA

DÉTERMINATION DES FIGURES D'ÉQUILIBRE ET DES TENSIONS D'UNE TIGE SOUPLE PESANTE SOUMISE A UN COURANT PERMANENT UNIFORME

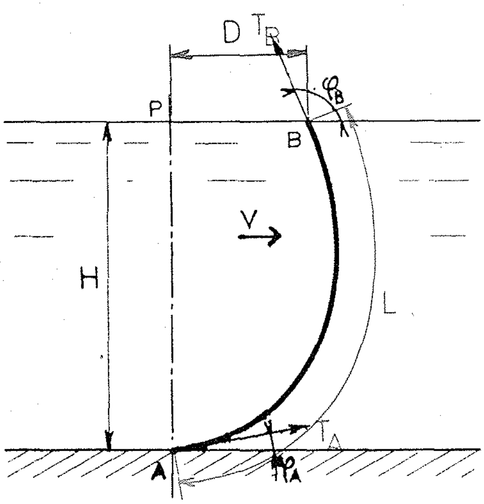
Le bateau est dans le plan vertical de la vitesse du courant.

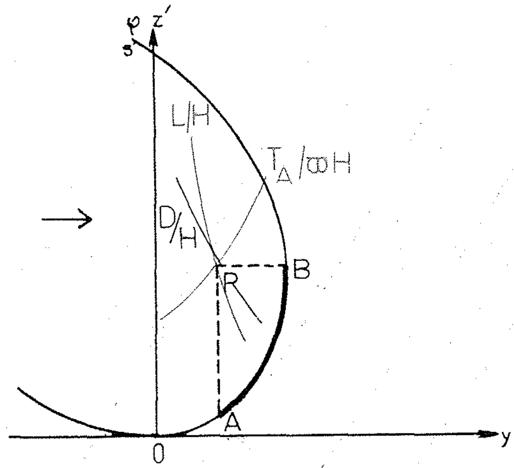
$$K = \frac{\rho_0 C_x d V^2}{2\varpi}$$

avec :

- ρ_0 masse spécifique de l'eau;
- C_x coefficient de traînée;
- d diamètre de la tige;
- ϖ poids linéique sous l'eau de la tige;
- V vitesse du courant.

$K = 0$	planche 1;
$K = 0{,}15$	planche 2;
$K = 0{,}6$	planche 3;
$K = 2{,}4$	planches 4 et 5.





L'abaque est en grandeurs adimensionnelles. L'unité de longueur est H_0. L'unité de force est ϖH_0. On a :

$$H = H_0 (z'_B - z'_A)$$
$$D = H_0 (y'_B - y'_A)$$
$$L = H_0 (s'_B - s'_A)$$
$$T_M = \varpi H_0 (1 + z'_M)$$

Les positions des points A et B ou P sont déterminées à partir des conditions imposées en utilisant :

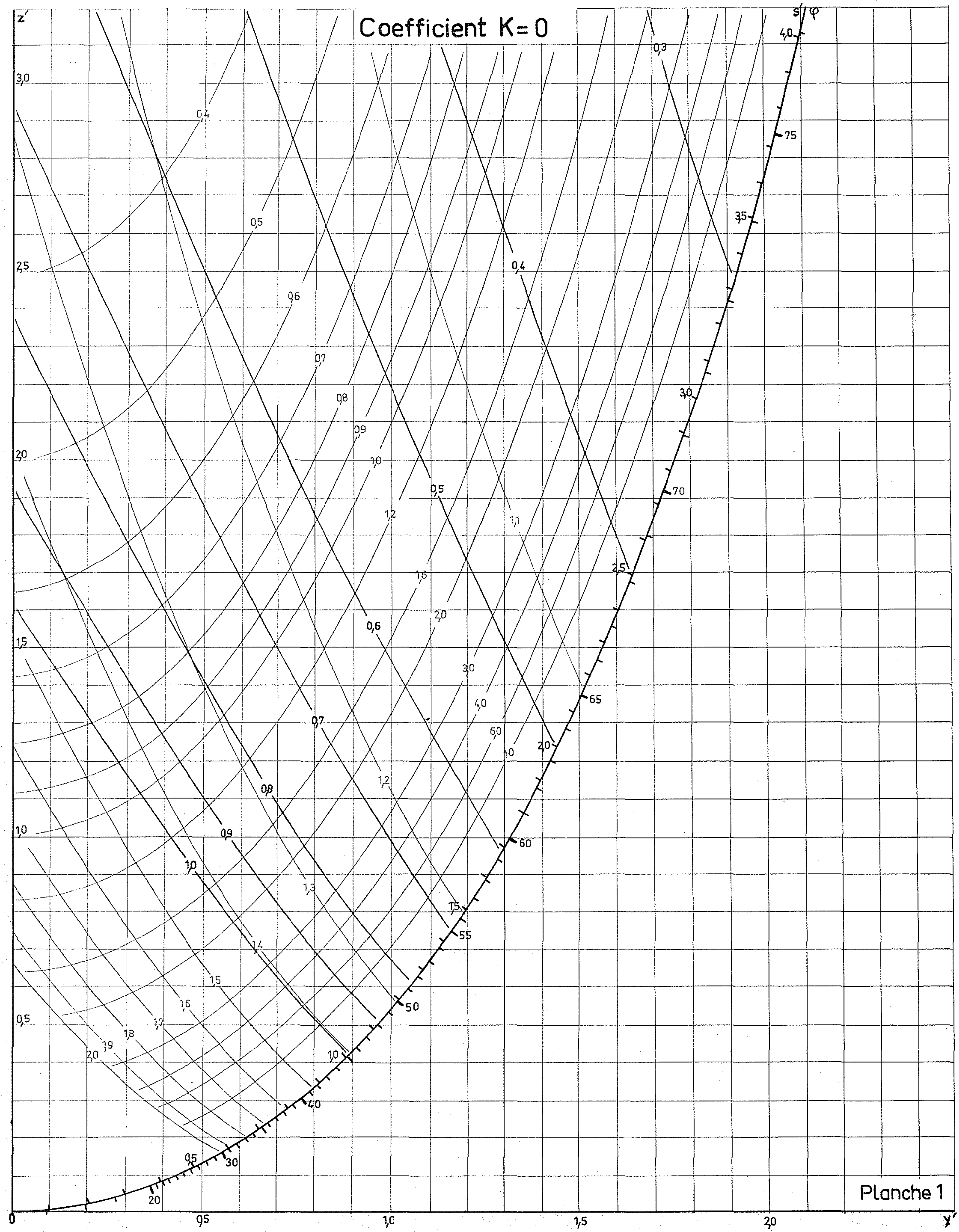
— soit la graduation en φ portée le long de la tige;

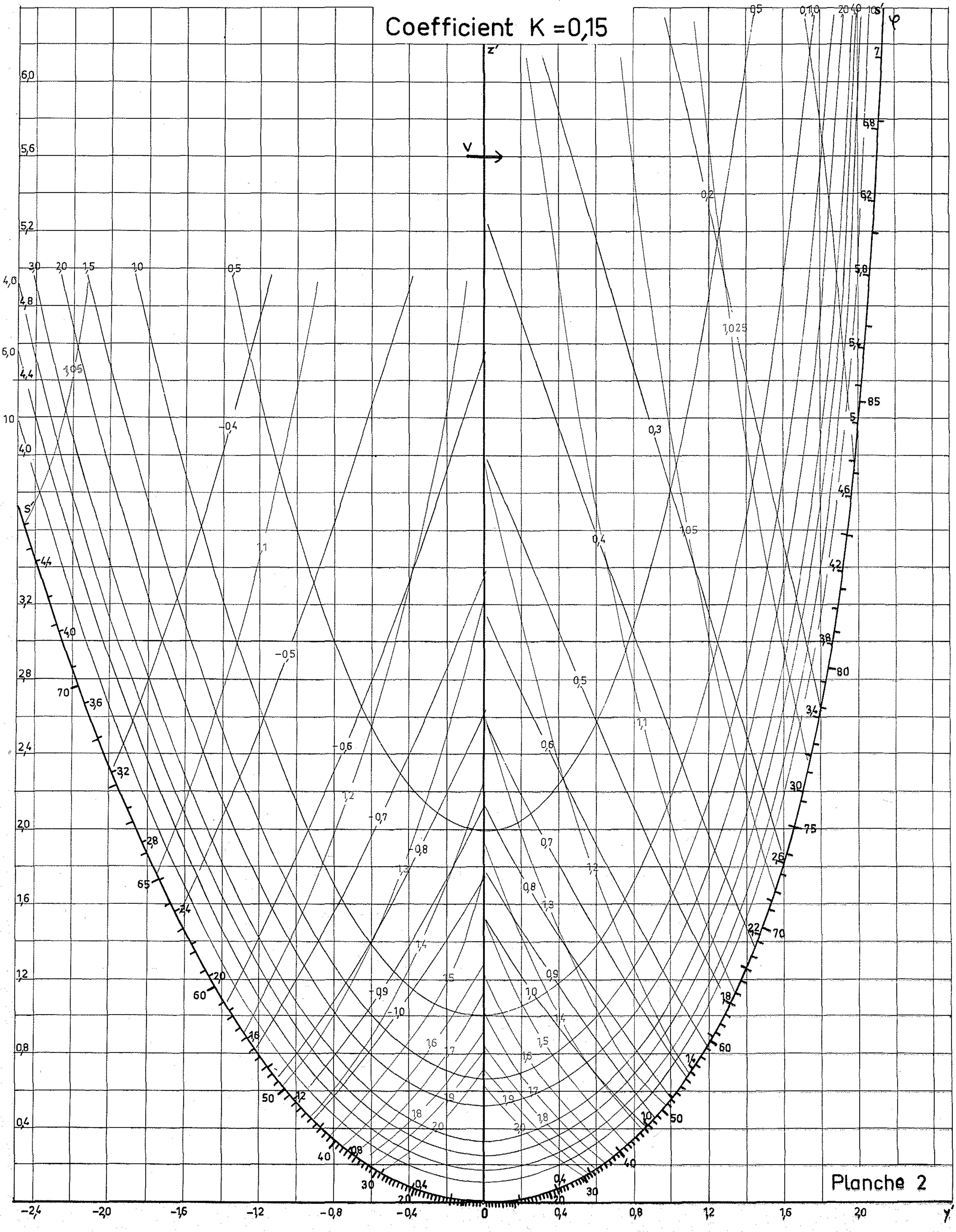
— soit les lieux du point P tels que :

L/H = constante : courbes ————

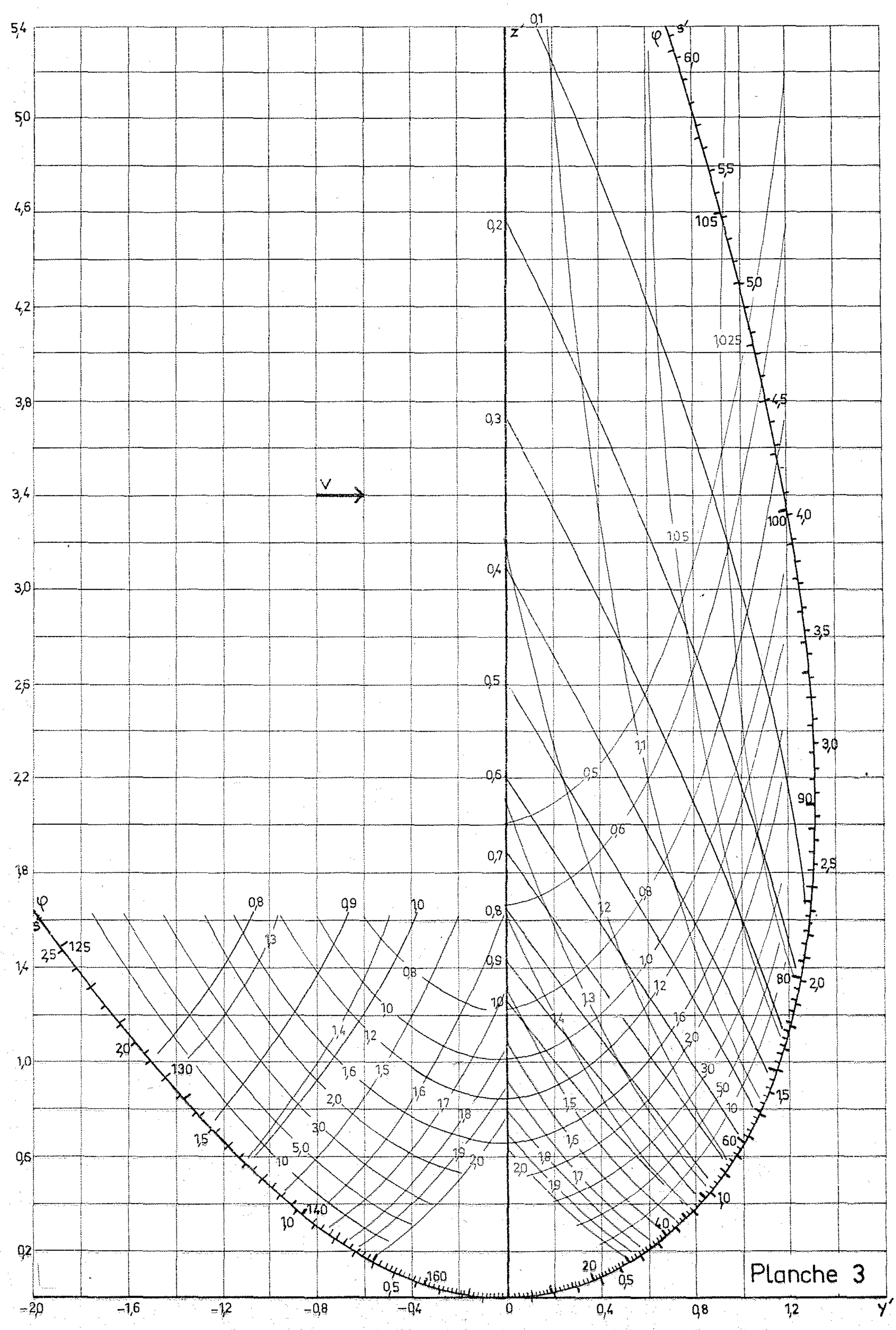
D/H = constante : courbes ————

$T_A/\varpi H$ = constante : courbes ————


Coefficient K= 0
Planche 1
z'
y'
s
φ


Coefficient K =0,15
Planche 2

Coefficient K = 0,6



Coefficient K = 2,4

1ère planche : $0 < \varphi_A < 90°$

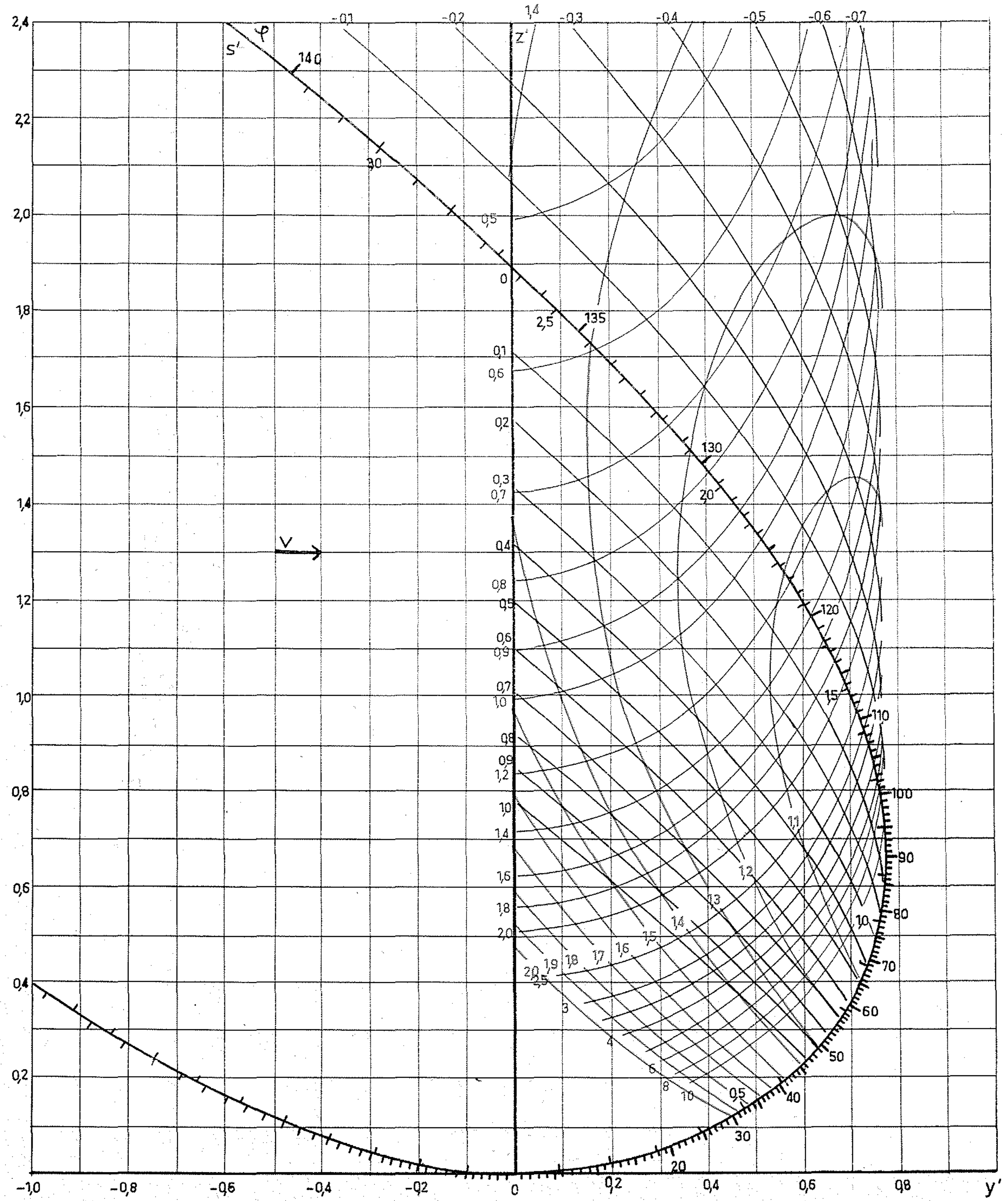


Planche 4

Coefficient K = 2,4

$2^{\text{ème}}$ planche : $\varphi_A > 90°$

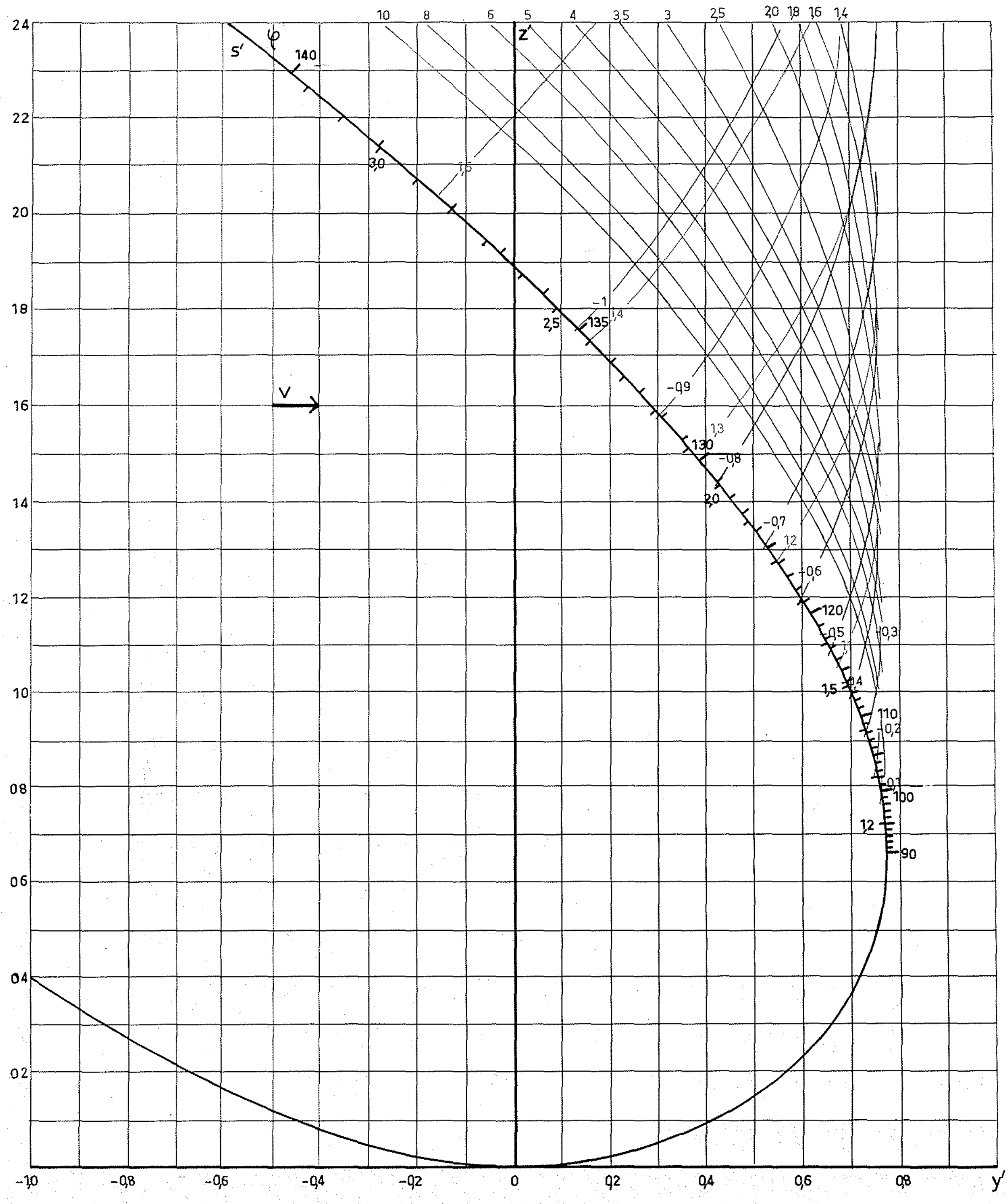


Planche 5