

J. DAT * ET C. FONADE **

**APPLICATION
DE L'ANALOGIE HYDRAULIQUE
A L'ÉTUDE DES
AMPLIFICATEURS A FLUIDES**

I. — Introduction

Pour améliorer les performances d'un amplificateur à fluide, il est bon de connaître l'écoulement à l'intérieur de celui-ci de façon à pouvoir optimiser la forme des canaux. Or, les faibles dimensions de ces derniers ne permettent d'effectuer que des mesures globales. On pourrait envisager de faire des modèles agrandis de ces amplificateurs mais, d'une part, l'introduction de « tube de Pitot » ou de sonde d'anémomètre à fil chaud modifierait l'écoulement dans les canaux et, d'autre part, les débits d'air nécessaires pour ces modèles agrandis ne pourraient être fournis par une installation d'air comprimé normale.

L'analogie entre un écoulement de fluide compressible en charge et un écoulement de fluide incompressible à surface libre permet de déterminer facilement les diverses caractéristiques d'un amplificateur à fluide et d'améliorer ses performances par retouches successives de la forme et des dimensions des canaux.

Nous allons rappeler, dans cet article, les propriétés de cette analogie et montrer qu'elle peut très bien permettre d'effectuer l'étude et la mise au point d'un amplificateur à fluide.

**II. — Rappel sur
les équations générales
des fluides**

Le comportement général d'un écoulement de fluide est connu si à tout instant et en n'importe quel point du fluide considéré, on peut connaître :

- les trois composantes u, v, w de la vitesse \vec{U} dans un système d'axes orthonormés ($\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$);
- la pression p ;
- la masse volumique ρ ;
- la température T .

Pour résoudre ce problème on doit disposer de 6 équations qui sont :

- a) l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse du fluide;
- b) les trois équations du mouvement (Navier et Stokes);
- c) l'équation exprimant la conservation de l'énergie du fluide;
- d) l'équation d'état reliant pression, masse volumique et température.

Enfin, pour définir complètement le problème, il faut connaître :

- les conditions initiales;
- les conditions aux limites,

les six équations indiquées ci-dessus s'écrivant dans le cas général :

* Professeur s.c. à la Faculté des Sciences de Toulouse.

** Ingénieur E.N.S.E.E.H.T., Assistant à la Faculté des Sciences de Toulouse.

a) Equation de continuité (cas d'un mouvement conservatif) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (1)$$

b) Equation du mouvement (équation de Navier et Stokes) :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + (\mu + \eta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + (\mu + \eta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (3)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + (\mu + \eta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (4)$$

avec :

$\vec{F}(X, Y, Z)$: force par unité de volume;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\theta = \operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

μ : coefficient de viscosité dynamique;

η : deuxième coefficient de viscosité.

c) Equation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left[H + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] - \frac{dp}{dt} \\ = \rho (uX + vY + wZ) + \Phi \\ - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

avec : H enthalpie du fluide;

k coefficient de conductivité thermique;

Φ fonction de dissipation donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi = \eta \theta^2 + 2 \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

d) Equation d'état qui se présente sous la forme générale :

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (6)$$

Cas particulier.

1. *Fluide incompressible.*

Pour un fluide incompressible, l'équation d'état (6) se réduit à :

$$\rho = \text{Cte}$$

L'équation de continuité (1) donne alors :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (7)$$

et, θ étant nul, les équations du mouvement s'écrivent alors sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{U} \quad (8)$$

Si la force de volume \vec{F} dérive d'un potentiel, on a :

$$\vec{F} = - \operatorname{grad} \Theta$$

Le cas habituel correspond au champ de pesanteur pour lequel :

$$\Theta = gz$$

On peut alors distinguer deux cas :

a) les pressions sont constantes dans des plans horizontaux, ce qui a lieu dans les deux cas suivants :

— écoulement en charge;

— écoulement à surface libre horizontale.

On peut alors regrouper les forces de volume et de pression et écrire le système d'équations du mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} &= - \frac{\partial p^*}{\partial z} + \mu \Delta w \end{aligned} \quad (9)$$

avec : $p^* = p + \rho gz$.

b) pour des écoulements à surface libre non horizontale, les pressions ne sont pas constantes dans des plans horizontaux et le système d'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} &= - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{aligned} \quad (10)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible en supposant que l'écoulement s'effectue à température constante, sans échanges calorifiques avec l'extérieur, l'équation de l'énergie ne fournit pas de relation supplémentaire; on peut en effet, montrer qu'elle est une combinaison des équations de Navier et Stokes et de l'équation de continuité.

2. *Fluide compressible.*

L'équation d'état pour un gaz parfait s'écrit :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (11)$$

L'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Dans les équations de Navier et Stokes, on peut négliger les forces de volumes et par ailleurs la relation de Stokes donnant :

$$\eta = - \frac{2}{3} \mu$$

les équations du mouvement s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{U} + \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U}) \quad (13)$$

L'équation de l'énergie se déduit immédiatement de la relation (5).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

III. — Etude de l'analogie entre les écoulements d'un fluide incompressible non visqueux à surface libre et d'un fluide compressible non visqueux en charge

1. Equations pour le fluide incompressible à surface libre.

L'écoulement s'effectue sur fond horizontal, l'axe \vec{Oz} est perpendiculaire à ce fond et dirigé vers le haut.

L'écoulement est donc limité inférieurement par le plan d'équation $z = 0$ et supérieurement par la surface libre (Σ) dont l'équation (inconnue) est de la forme :

$$z = Z(x, y, t)$$

Les conditions aux limites sont donc :

$$p = p_a \text{ (pression atmosphérique) sur la surface libre } (\Sigma);$$

$$w = 0 \text{ sur le fond.}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La composante verticale w de la vitesse, nulle sur le fond, est en pratique toujours faible à la surface libre et ses variations sont lentes. On peut donc supposer :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dt} = 0 \quad (15)$$

De ce fait, la dernière des équations (14) s'écrit alors :

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

soit :

$$p = -\rho g z + Cte = \rho g (Z - z) + p_a \quad (16)$$

Les équations (7) et (14) appliquées à une particule fluide qui se trouve à la surface libre, peuvent donc s'écrire, compte tenu de (15) et (16) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

et la composante w de la vitesse donne dans les mêmes conditions :

$$w = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

équation qui, compte tenu de (17), peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial (uZ)}{\partial x} + \frac{\partial (vZ)}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

2. Equations pour le fluide compressible (écoulement en charge).

L'écoulement en charge considéré étant supposé plan, les équations du mouvement s'écrivent (en affectant d'un exposant ($'$) les variables et grandeurs caractéristiques relatives au gaz) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial (\rho' v')}{\partial y'} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du'}{dt'} &= \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} \\ \frac{dv'}{dt'} &= \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

3. Analogie entre ces deux écoulements.

On cherche une analogie entre l'écoulement d'un liquide à surface libre régi par les équations (18) et (20) et l'écoulement en charge d'un gaz régi par les équations (21) et (22).

Nous noterons les rapports de similitude liant les deux écoulements ainsi :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda \quad \frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \alpha \quad \frac{t}{t'} = \tau \quad (23)$$

avec évidemment la relation :

$$\lambda = \alpha \tau \quad (24)$$

La première des équations (18) relative à l'écoulement du liquide s'écrit en exprimant les grandeurs en fonction de leurs homologues dans l'air et des rapports de similitude :

$$\frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\alpha^2}{\lambda} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\alpha^2}{\lambda} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{g}{\lambda} \frac{\partial Z}{\partial x'}$$

qu'il faut comparer à la première des équations (22).

Il y aura donc similitude entre les deux écoulements, compte tenu de (24), si :

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{g \rho'}{\lambda} \frac{\partial Z / \partial x'}{\partial p' / \partial x'}$$

soit :

$$\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{g}{\alpha^2} \frac{\partial Z}{\partial x'} \quad (25)$$

On sait par ailleurs que, si l'écoulement du gaz est isentropique, il obéit à une loi de la forme :

$$p' = K\rho'^k \quad (26)$$

On obtient donc en reportant cette relation dans l'équation (25) :

$$Kk\rho'^{k-2} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{g}{\alpha^2} \frac{\partial Z}{\partial x'}$$

équation qui s'intègre directement sous la forme :

$$\frac{k}{k-1} K\rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} Z + \varphi(y') \quad (27)$$

La comparaison entre la deuxième des équations (18) et la deuxième des équations (22) conduirait à la relation :

$$\frac{k}{k-1} K\rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} Z + \varphi_1(x')$$

Il n'y aura compatibilité que si φ et φ_1 sont des constantes pures (indépendantes de x' et y').

Les équations du mouvement nous donnent donc la relation :

$$\frac{k}{k-1} K\rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} Z + C_1$$

ce qui, en appliquant cette relation en un point particulier (l'infini aval par exemple), nous conduit à :

$$\frac{k}{k-1} K (\rho'^{k-1} - \rho'_{\infty}{}^{k-1}) = \frac{g}{\alpha^2} (Z - Z_{\infty}) \quad (28)$$

Considérons alors les équations de continuité (20) et (21). Leur forme nous permet de supposer qu'il existe une relation entre ρ' et Z que nous noterons :

$$\rho' = f(Z)$$

En tenant compte de cette dernière relation et des rapports de similitude (23), la transformation de l'équation de continuité du gaz nous amène à l'équation :

$$\tau \frac{df}{dZ} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\lambda}{\alpha} f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{df}{dZ} \left(u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = 0$$

En comparant cette équation à l'équation (20), on obtient les conditions d'analogie :

$$\tau \frac{df}{dZ} = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{df}{dZ} = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{f}{Z}$$

ce qui, compte tenu du fait que :

$$\tau = \frac{\lambda}{\alpha}$$

nous donne l'unique relation :

$$\frac{df}{dZ} = \frac{f}{Z} \quad \text{soit : } \rho' = f(Z) = C_2 Z \quad (29)$$

En combinant les relations (28) et (29), on obtient :

$$\frac{k-1}{k} \frac{g}{K\alpha^2 C_2} = \frac{\rho'^{k-1} - \rho'_{\infty}{}^{k-1}}{\rho' - \rho'_{\infty}}$$

Ce rapport doit donc être constant quel que soit ρ' . En dérivant alors la relation :

$$\frac{\rho'^{k-1} - \rho'_{\infty}{}^{k-1}}{\rho' - \rho'_{\infty}} = \text{Cte } K_1$$

par rapport à ρ' et en supposant :

$$\rho' - \rho'_{\infty} \neq 0$$

nous obtenons la relation :

$$(k-1) \rho'^{k-2} = K_1 \quad \forall \rho'$$

ce qui impose :

$$k = 2$$

On a alors :

$$C_2 = \frac{g}{2K\alpha^2}$$

et donc :

$$C_1 = 0$$

Les relations (26), (28) et (29) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{p'}{\rho'^2} &= K \\ \rho' - \rho'_{\infty} &= \frac{g}{2K\alpha^2} (Z - Z_{\infty}) \\ \rho' &= \frac{g}{2K\alpha^2} Z \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

soit, compte tenu de $\frac{p'}{\rho'} = rT'$:

$$\left(\frac{p'}{\rho'_{\infty}} \right)^{1/2} = \frac{\rho'}{\rho'_{\infty}} = \frac{T'}{T'_{\infty}} = \frac{Z}{Z_{\infty}} \quad (31)$$

Nous pouvons vérifier que les équations de conservation de l'énergie :

$$H' + \frac{U^2}{2} = \text{Cte} \quad \text{pour la transformation adiabatique et sans échange de travail d'un gaz (Zeuner) et avec :}$$

$$H' = E' + \frac{p'}{\rho'} = \frac{k}{k-1} \frac{p'}{\rho'}$$

pour un gaz parfait;

$$Z + \frac{U^2}{2g} = \text{Cte} \quad (\text{Bernoulli}).$$

sont compatibles avec la relation (29).

En effet, des relations ci-dessus, nous obtenons, en considérant des vitesses nulles à l'infini aval :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{U}{U'} = \frac{\sqrt{2g(Z - Z_{\infty})}}{\sqrt{2(H' - H'_{\infty})}} \\ &= \sqrt{\frac{g(Z - Z_{\infty})}{\frac{kK}{k-1} (\rho'^{k-1} - \rho'_{\infty}{}^{k-1})}} \end{aligned}$$

qui n'est autre que la relation (28).

Il est à remarquer que dans les relations (30) intervient seulement le rapport de similitude α des vitesses, celui des dimensions n'intervenant pas.

La vitesse du son dans un gaz est donnée par :

$$a' = \sqrt{k \frac{p'}{\rho'}} \quad (32)$$

Pour le gaz fictif ($k = 2$) l'analogie de cette vitesse a' sur le modèle en eau sera, compte tenu du rapport de similitude α des vitesses :

$$a = \alpha a' = \alpha \sqrt{\frac{2 p'}{\rho'}}$$

avec :

$$p' = K \rho'^2 = \frac{gZ}{2 \alpha^2} \rho'$$

d'après (26) et (30), d'où :

$$a = \sqrt{gZ} \quad (33)$$

La vitesse du son dans le gaz fictif est donc représentée dans le liquide par \sqrt{gZ} . Or, on sait que $C = \sqrt{gZ}$ représente la vitesse de propagation d'une onde de faible amplitude à la surface d'un plan d'eau de tirant d'eau Z sur fond horizontal.

Si on appelle U' la vitesse du fluide compressible et U celle de l'eau, le nombre de Mach $M' = U'/a'$ a pour analogue dans l'écoulement liquide :

$$M = \frac{U}{\sqrt{gZ}}$$

qui n'est autre que le nombre de Froude \mathcal{F} .

De plus, comme :

$$U = \alpha U' \quad \text{et} \quad \sqrt{gZ} = \alpha a'$$

on voit donc que dans la similitude envisagée, on doit réaliser l'égalité entre le nombre de Mach de l'écoulement gazeux et le nombre de Froude de l'écoulement liquide.

Soit :

$$\frac{U'}{a'} = \frac{U}{\sqrt{gZ}} \quad (34)$$

IV. — Etude de cette même analogie en tenant compte de la viscosité des fluides

1. Équations pour le fluide incompressible.

Elles sont données par les équations (7) et (10) ci-dessus.

On peut toujours, comme précédemment, supposer que :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dt} = 0 \quad \text{et aussi} \quad \Delta w = 0$$

La troisième équation du système (10) est alors identique à la troisième équation du système (14) et on obtient encore la relation (16) :

$$p = \rho g (Z - z) + p_a \quad (16)$$

Le système d'équations appliqué à une particule fluide à la surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \Delta v \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

avec toujours, puisque $w = 0$:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial (uZ)}{\partial x} + \frac{\partial (vZ)}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

2. Équation pour le fluide compressible.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial (\rho' v')}{\partial y'} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu'}{\rho'} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\mu'}{\rho'} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

On introduit un rapport de similitude supplémentaire :

$$\frac{\mu/\rho}{\mu'/\rho'} = \frac{\nu}{\nu'} = \beta \quad (23 \text{ bis})$$

A la surface libre, $\partial u/\partial z$ et $\partial v/\partial z$ ne sont pas nuls mais leur variation demeure faible, si bien que l'on peut supposer que $\partial^2 u/\partial z^2$ et $\partial^2 v/\partial z^2$ sont négligeables.

La première des équations (35) peut alors s'écrire :

$$\frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\alpha^2}{\lambda} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\alpha^2}{\lambda} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{g}{\lambda} \frac{\partial Z}{\partial x'} + \frac{\beta \alpha}{\lambda^2} \nu' \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

qui, comparée à la première des équations (36), donne les relations de similitude :

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{g \rho'}{\lambda} \frac{\partial Z/\partial x'}{\partial p'/\partial x'} = \frac{\beta \alpha}{\lambda^2} \quad (37)$$

La première de ces égalités n'est autre que la relation (25) qui conduit aux relations (30) et (31) et dont on déduit la relation (34) qui traduit le fait que, dans l'analogie envisagée, on doit réaliser l'égalité entre le nombre de Mach de l'écoulement

gazeux et le nombre de Froude de l'écoulement liquide.

La deuxième égalité (37) :

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{\beta\alpha}{\lambda^2}$$

donne :

$$\alpha\lambda = \beta \tag{38}$$

qui traduit l'égalité des nombres de Reynolds des deux écoulements.

En résumé, pour qu'il y ait analogie entre l'écoulement à surface libre d'un fluide incompressible et visqueux avec l'écoulement en charge d'un fluide compressible et visqueux, il faut réaliser d'une part l'égalité entre le nombre de Mach et le nombre de Froude et d'autre part l'égalité entre les nombres de Reynolds des deux écoulements.

V. — Utilisation de l'analogie dans l'étude des amplificateurs à fluide

La relation caractéristique de cette analogie :

$$\rho' = \frac{g}{2K\alpha^2} Z \tag{30}$$

montre que le rapport Z/ρ' demeure constant.

Nous poserons donc :

$$\frac{Z}{\rho'} = \theta \tag{39}$$

et la relation (30) donne immédiatement :

$$\alpha^2 = \frac{g\theta}{2K} \tag{40}$$

Cette relation peut se déduire également de l'égalité entre les nombres de Mach et de Froude. En effet :

$$\frac{U'}{\alpha'} = \frac{U}{\sqrt{gZ}}$$

donne, compte tenu de (39) et de $p' = K\rho'^2$:

$$\alpha = \frac{U}{U'} \sqrt{\frac{gZ}{2p'/\rho'}} = \sqrt{\frac{g\theta}{2K}}$$

relation identique à (40).

Remarquons que dans le modèle à air, la hauteur h des canaux demeure constante et que la masse volumique ρ' du fluide varie. Dans le modèle à liquide, c'est l'inverse qui se produit : la masse volumique ρ_e demeure constante, mais le tirant d'eau Z varie.

Nous avons introduit les rapports de similitude (23) que nous rappelons :

— rapport des longueurs dans un plan horizontal. $\frac{L}{L'} = \lambda$

— rapport des vitesses. $\frac{U}{U'} = \alpha$

— rapport des temps. $\frac{t}{t'} = \tau$

avec la relation. $\alpha = \frac{\lambda}{\tau}$

Pour mettre en œuvre un modèle à eau, il faut connaître le débit à utiliser et pour cela il faut déterminer l'échelle des débits qui est donnée par :

$$q_m = \frac{Q_m}{Q'_m} = \frac{\rho_e ULZ}{\rho' U' L' h} = \frac{\rho_e}{h} \alpha \lambda \theta \tag{41}$$

Exemple d'application :

Prenons un exemple pour montrer qu'il est possible de construire un modèle à eau afin d'effectuer l'étude d'un amplificateur à fluide. Nous considérons essentiellement la buse d'alimentation d'un amplificateur à fluide non chargé. Nous supposons ainsi que dans la zone d'interaction des jets on a sensiblement la pression atmosphérique.

- Caractéristiques de l'amplificateur de base :
 - à l'aval : $p'_\infty = 1$ bar (pression atmosphérique);
 - à l'amont : $p'_0 = 1,5$ bar;
 - hauteur des canaux : $h = 4.10^{-3}$ m;
 - largeur de la buse : 2.10^{-3} m.

Soit :

$$\rho'_\infty = 1,226 \text{ kg/m}^3 \text{ à } 15^\circ \text{C}$$

$$\rho'_0 = \rho'_\infty \sqrt{\frac{p'_0}{p'_\infty}} = 1,505 \text{ kg/m}^3$$

(pour le gaz analogue pour lequel $\gamma = 2$).

- Sur le modèle à eau; nous prenons :

$$\lambda = 20$$

$$Z_\infty = 0,10 \text{ m (tirant d'eau aval)}$$

La relation $\theta = (z/\rho')$ appliquée à l'infini aval donne :

$$\theta = 0,0815 \text{ m/kg/m}^3$$

La connaissance de θ permet de déterminer Z_0 (tirant d'eau amont) :

$$Z_0 = \theta\rho'_0 = 0,0815 \times 1,505 = 0,122 \text{ m}$$

Le coefficient K figurant dans l'expression (40) a la valeur :

$$K = \frac{p'_\infty}{\rho'^2_\infty} = 66\,500$$

D'où le rapport des vitesses :

$$\alpha = \sqrt{\frac{g\theta}{2K}} = 2,42.10^{-3}$$

Ceci peut se vérifier de la façon suivante :

La formule de Zeuner appliquée à un gaz parfait permet de calculer la vitesse. On a en effet :

$$\frac{U^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p'}{\rho'} = \text{Cte}$$

avec $k = 2$ dans notre cas.

Ce qui donne entre l'amont et l'aval de la buse d'alimentation par exemple, en admettant que la

zone d'interaction est à la pression atmosphérique (le module n'étant pas chargé) :

$$\frac{U'^2}{2} = 2 \left(\frac{p'_0}{\rho'_0} - \frac{p'_\infty}{\rho'_\infty} \right)$$

d'où $U' = 270$ m/s (ordre de grandeur de la vitesse à la sortie de la buse d'un amplificateur à fluide).

La vitesse sur le modèle à eau est donnée par :

$$U = \sqrt{2g(Z_0 - Z_\infty)} = 0,655 \text{ m/s}$$

On vérifie que le rapport α est :

$$\alpha = \frac{0,655}{270} = 2,42 \cdot 10^{-3}$$

(valeur obtenue directement ci-dessus).

Considérons le rapport des débits (41) :

$$q_m = \frac{\rho_e}{h} \alpha \lambda \theta = 986$$

Le débit massique de gaz à travers la buse est :

$$Q'_m = \rho' U' S' = 1,226 \times 270 \times 8 \cdot 10^{-6} = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$$

Le débit d'eau à la sortie de la buse sur le modèle à eau se calcule, compte tenu de ce que avec $\lambda = 20$, la largeur de la buse est de $4 \cdot 10^{-2}$ m et la hauteur d'eau à la sortie de la buse, de 10 cm :

$$Q_{\text{eau}} = \rho_e \cdot U \cdot S = 0,655 \times 0,1 \times 0,04 = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

soit un débit massique de 2,62 kg/s.

On retrouve très bien le rapport des débits :

$$q_m = \frac{2,62}{2,65 \cdot 10^{-3}} \# 986$$

En résumé, on voit que la réalisation du modèle à eau est parfaitement possible : en effet, nous avons choisi :

$$\lambda = 20 \quad \text{et} \quad Z_\infty = 10 \text{ cm}$$

l'analogie exige que le modèle réponde aux caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} Z_0 &= 12,2 \text{ cm} \\ U_{\text{max}} &= 0,655 \text{ m/s} \\ Q_{\text{max}} &= 2,62 \text{ l/s} \end{aligned}$$

Ces valeurs sont faciles à réaliser sur un modèle à eau.

Une fois le modèle à eau réglé, la mesure précise des tirants d'eau doit permettre grâce aux relations (31) de connaître l'évolution du gaz fictif dans l'amplificateur.

Si l'on prend en considération la viscosité respective des fluides, on a à 15 °C :

$$\beta = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{1,14 \cdot 10^{-6}}{1,45 \cdot 10^{-5}} = 0,0786$$

Ce rapport de similitude supplémentaire enlève un degré de liberté à la conception du modèle. Dans le cas précédent, nous avons choisi arbitrairement

le rapport de similitude géométrique λ et le tirant d'eau aval sur le modèle.

Dans le cas présent, l'introduction de β impose la valeur de λ :

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0,0786}{2,42 \cdot 10^{-3}} = 32,5$$

L'échelle de débit devient :

$$q_m = 1\,600$$

et le débit sur le modèle sera de : 4,24 l/s.

Le modèle à surface libre, bien que plus grand, est encore aisément réalisable.

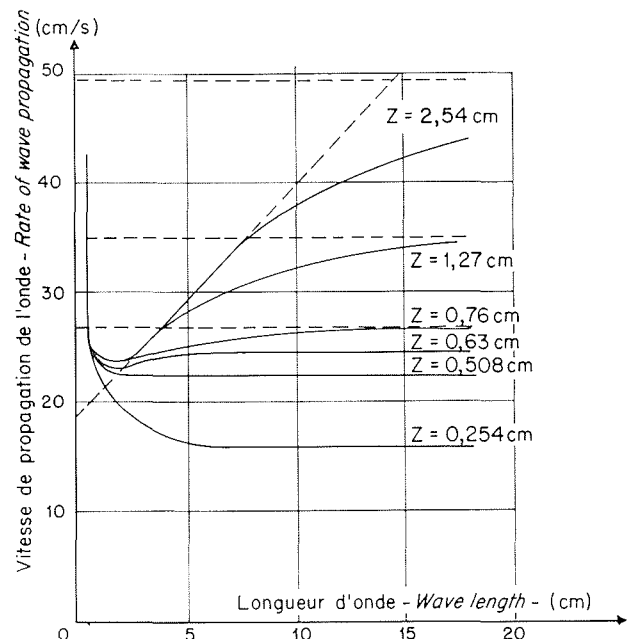
VI. — Remarque sur la validité de l'analogie

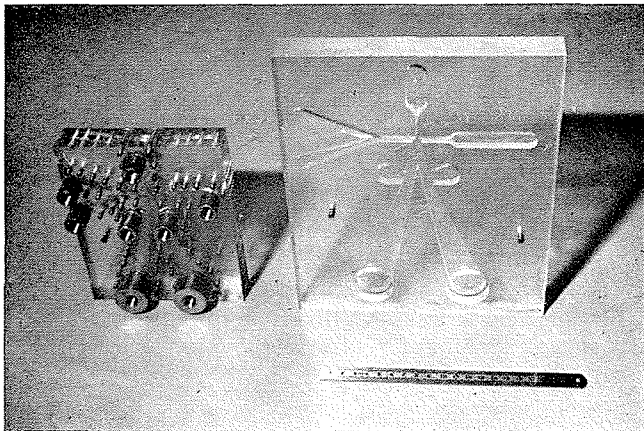
1. Influence du tirant d'eau.

Les nombreuses publications que nous citons en référence appliquent essentiellement l'analogie ci-dessus aux problèmes d'ondes de choc produites par des obstacles placés dans des écoulements supersoniques et étudient en particulier l'analogie entre l'onde de choc et le ressaut hydraulique. Toutes ces études soulignent qu'il ne peut y avoir analogie dans la propagation des ondes que si le tirant d'eau sur le modèle hydraulique ne dépasse pas 6 à 8 mm.

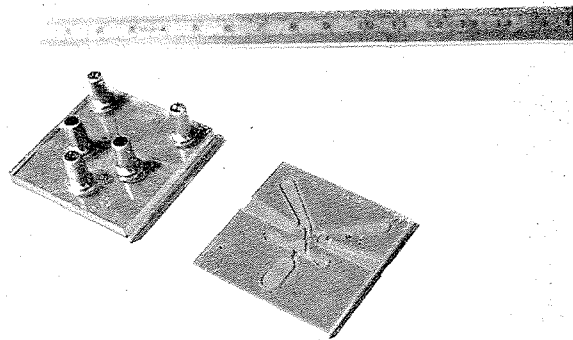
En effet, comme l'indique la figure 1 extraite de la référence [11], la vitesse de propagation d'une onde n'est indépendante de la longueur d'onde que pour un tirant d'eau de 0,20 pouces soit environ 6 à 7 mm.

Bien que certains laboratoires américains aient fait des études d'amplificateurs à fluide sur table à eau en respectant des tirants d'eau de cet ordre de grandeur, cela nous paraît inutile, du fait que les écoulements d'air dans les modules sont subsoni-

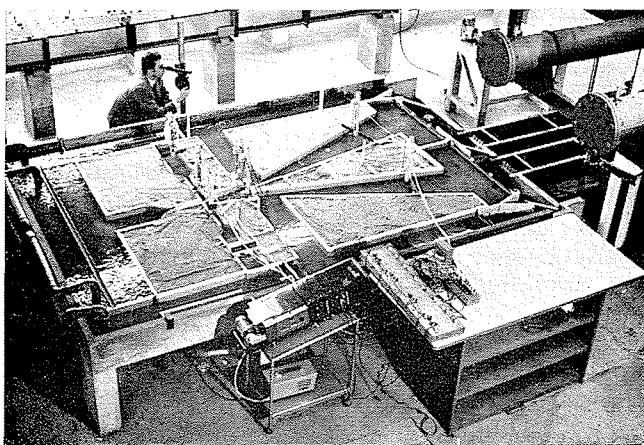




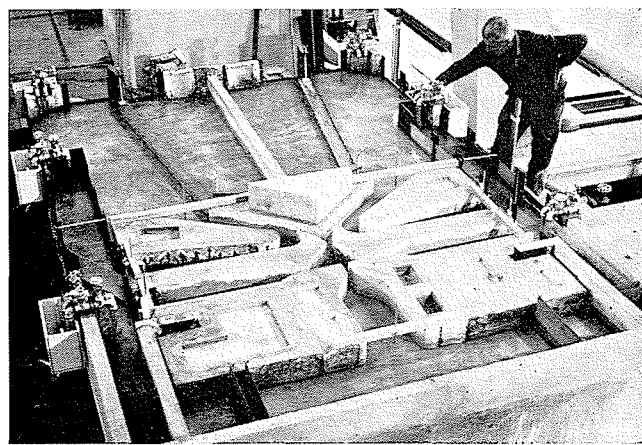
2/



4/



3/



5/

ques et qu'il n'y a donc pas à envisager le phénomène d'onde de choc.

Le fait de pouvoir utiliser des tirants d'eau beaucoup plus importants favorise énormément la mesure, sur la table à eau, des différents paramètres utiles et augmente fortement la précision des mesures.

2. Influence de la composante verticale de la vitesse.

Parmi les hypothèses faites, on a supposé que la composante verticale w de la vitesse était faible et ne variait que lentement pour pouvoir la négliger et négliger également dw/dt .

Pour satisfaire au mieux à cette hypothèse, il faudra que la ligne d'eau soit le moins perturbée possible et en particulier qu'il n'y ait aucun risque de formation de ressaut hydraulique : il faudra donc avoir un tirant d'eau qui soit supérieur à la hauteur critique. Or, celle-ci est donnée par la formule :

$$h^3 c = \frac{q^2}{g}$$

(q débit par unité de largeur).

Appliquée à notre problème, la hauteur critique serait atteinte si :

$$Z^3 = \frac{U^2 Z^2}{g} \quad \text{soit} \quad \frac{U^2}{gZ} = 1$$

[(U/\sqrt{gZ}) = nombre de Froude].

On aurait donc : nombre de Froude = nombre de Mach = 1.

L'écoulement à la sortie de la buse de l'amplificateur serait sonique. Donc, en ayant des tirants d'eau toujours supérieurs à la hauteur critique, on est assuré d'être en écoulement subsonique dans l'amplificateur à fluide.

3. Influence du rapport des chaleurs volumiques.

Pour le gaz théorique intervenant dans l'analogie : $k = 2$ alors que pour l'air $k = 1,4$. Cette différence, apparemment importante, n'a pas une influence aussi grande qu'on pourrait le croire *a priori*. Nous ne rentrerons pas dans les détails des expériences qui ont amené certains chercheurs à cette conclusion, le lecteur trouvera dans les références, particulièrement à la référence 10 des considérations relatives à ce sujet.

Conclusion

Nous avons montré que l'analogie hydraulique pouvait très bien être utilisée pour étudier les amplificateurs à fluide. La figure 2 montre une fonction « OU-NI » à deux entrées, réalisée par la S.O.G.E.V. et la figure 3 montre le modèle à l'échelle 50 que nous avons réalisé sur une table à eau.

De même, la figure 4 montre une bascule mono-stable étudiée par la Société Bertin et la figure 5 montre son modèle réalisé également à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Nous présenterons dans un futur article les résultats comparés des études effectuées sur ces deux groupes d'éléments.

Notations générales

Les notations particulières non précisées ci-dessous sont indiquées dans le texte.

k : rapport des chaleurs spécifiques du gaz;

p : pression statique en un point;

q_m : rapport de similitude des débits massiques;

Q_m : débit massique;

t : temps;

T : température absolue;

u, v, w : composantes de la vitesse instantanée \vec{U} dans le trièdre $oxyz$;

\vec{U} : vecteur vitesse instantanée;

$oxyz$: trièdre orthonormé de référence;

Z : tirant d'eau en un point;

α : rapport de similitude des vitesses;

λ : rapport de similitude géométrique;

μ : viscosité dynamique du fluide;

ρ' : masse volumique du gaz;

ρ_e : masse volumique de l'eau;

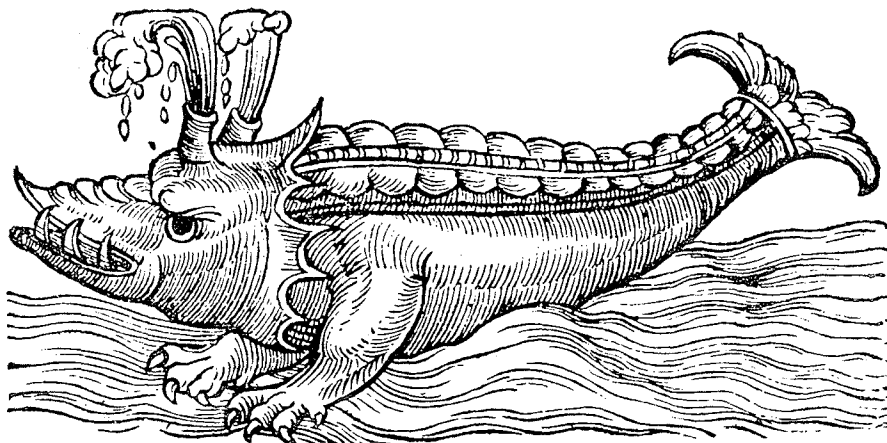
ν : viscosité cinématique du fluide.

INDICES :

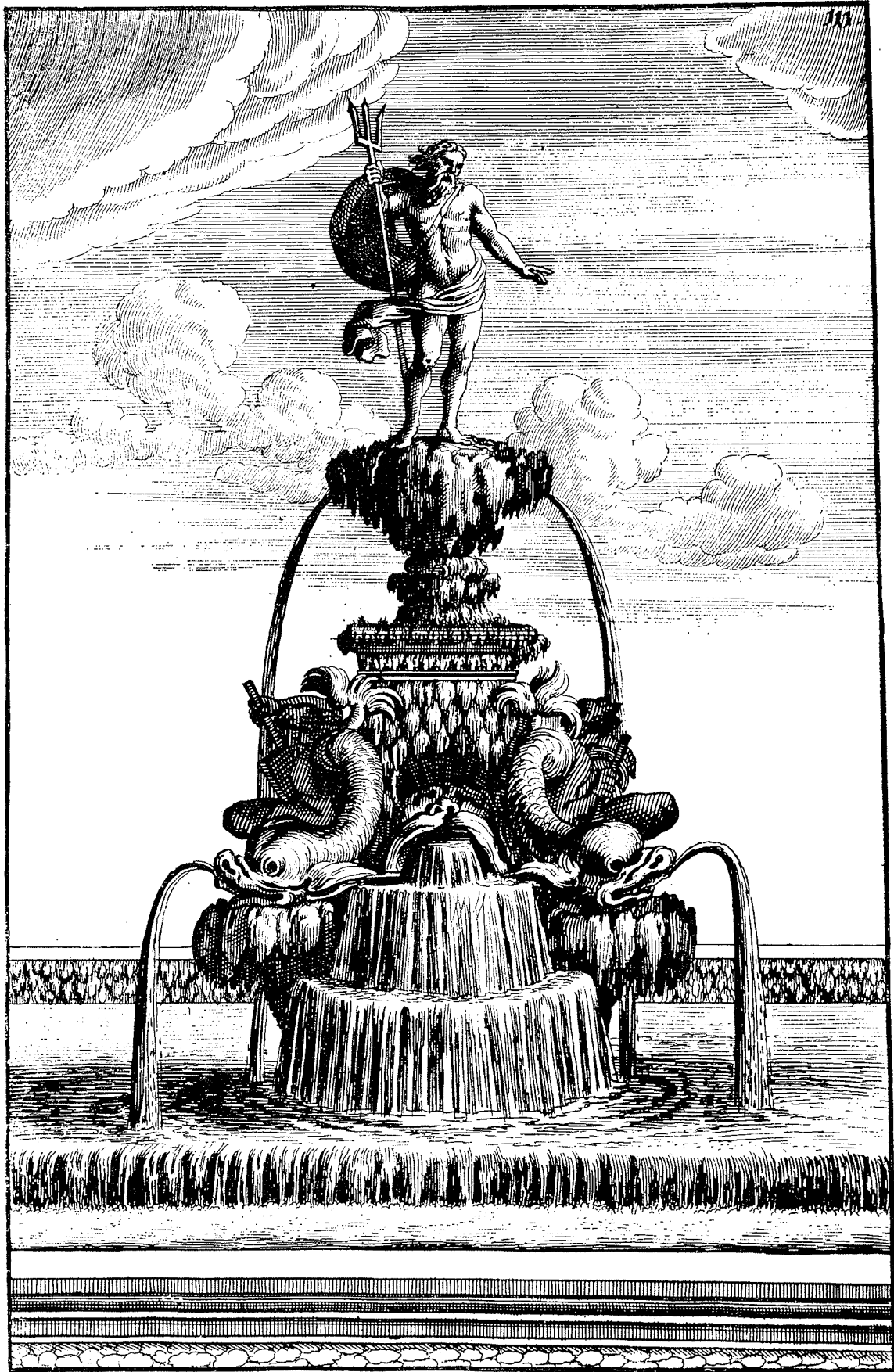
◦ : conditions de réservoir (infini amont);

∞ : conditions à l'infini aval.

- [1] CAIUS Jacob. — Introduction mathématique à la Mécanique des fluides.
- [2] COMOLET (R.). — Mécanique expérimentale des fluides (tomes 1 et 2).
- [3] RIABOUCHINSKY. — Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible. *C.R.A.S.* (novembre 1932).
- [4] WORONETZ (C.). — Sur quelques applications de la méthode de l'analogie hydraulique. *Publ. scientif. et Techn. du Ministère de l'Air*, n° 144 (1939).
- [5] ORLIN (J.), LINDNER (N.J.) and BITTERLY (J.G.). — Application of the analogy between water flow with a free surface and two dimensional compressible gas flow. *NACA* (février 1947).
- [6] VON KARMAN. — The similarity law of transonic flow (juillet 1947).
- [7] FLOWER (J.V.). — The development of experimental techniques for the study of compressible flow by the hydraulic analogy. Thèse, Université de Californie (août 1951).
- [8] LAITONE (E.V.). — A study of transonic gaz dynamics by the hydraulic analogy. *Journal of the aeronautical sciences* (avril 1952).
- [9] SUPINO (G.). — Air-water analogy and the study of hydraulics models. *NACA* (juillet 1953).
- [10] HARLEMAN (D.R.F.) and IPPEN (A.T.). — The range of application of the hydraulic analogy in transonic and supersonic aerodynamics. Mémoire sur la Mécanique des Fluides. *Publications scientifiques du Ministère de l'Air* (1954).
- [11] LAITONE (E.V.). — Developments in gaz dynamics by the hydraulic analogy. Mémoire sur la mécanique des fluides. *Publications scientifiques du Ministère de l'air* (1954).
- [12] LAITONE (E.V.). — The limitation of the hydraulic analogy. *Journal of the Aerospace Sciences* (août 1961).
- [13] HOYT (J.W.). — A study of jet deflection by the hydraulic analogy. *Journal of the Aerospace Sciences* (juin 1962).
- [14] HOYT (J.W.). — The hydraulic analogy for compressible gas flow. *Applied Mechanics* (juin 1962).
- [15] BARCLAY (R.). — Use of hydraulic analogy in the study of fluid interaction devices. *H.D.L.* (avril 1963).
- [16] FIEBIG. — Corresponding compressible and incompressible jets and wakes. 6^e Congrès Aéronautique Européen, Munich (1965).



Bois gravé du XVI^e siècle



Gravure extraite de *Architectura curiosa nova* par G. A. BOCKLERN
Nuremberg (1664)