



CALCUL DE L'AMPLIFICATION ACOUSTIQUE DANS LES CIRCUITS COMPLEXES : APPLICATION AUX VIBRATIONS DES ÉCHANGEURS DU RÉACTEUR CHINON III

par G. BAYLAC

Ingénieur EDF, Direction des Etudes et Recherches, Chatou

R.-J. GIBERT et M. LIVOLANT

Ingénieurs CEA, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Dans une première partie, nous examinerons le problème des sources de bruit dans les circuits parcourus par un fluide et nous donnerons les principes du calcul de leur amplification.

Dans une deuxième partie, nous appliquerons les résultats de la première partie à un problème concret : les vibrations des échangeurs du réacteur Chinon III.

2. — Mise en évidence des "sources de bruit" et définition d'un modèle d'étude de leur amplification dans le circuit

1^{re} partie

1. — Introduction

En chaque point d'un circuit parcouru par un fluide (tels les circuits de refroidissement des réacteurs) il existe des fluctuations de pression et de vitesse pouvant induire des vibrations de structure et occasionner des ruptures en fatigue.

L'objet de cette partie est double :

a) Déterminer l'origine de ces fluctuations : ce problème, comme nous le verrons, se rattache au problème général de la turbulence. Il n'est pas question ici de le résoudre complètement par le calcul mais les expressions présentées permettent d'avoir une idée des principaux paramètres intervenant, idée qui devra être confirmée par l'expérience.

b) Calculer, à partir de ces « sources » de fluctuation, la réponse du circuit. Ici le calcul est plus simple et un programme valable a pu être mis au point.

2.1 Equations générales. Séparation des termes de sources et de propagation.

Dans un circuit parcouru par un fluide, la turbulence (en appliquant ce terme aux fluctuations correspondant non seulement à des « tourbillons » de dimension petite devant les dimensions macroscopiques de l'écoulement, mais aussi aux « gros tourbillons » à l'échelle du circuit) se traduit par des fluctuations de vitesse jouant le rôle de source de bruit; ce bruit émis se propage dans le circuit selon une équation d'onde sonore.

En effet considérons les deux équations fondamentales de l'hydrodynamique (notations classiques) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\rho}v) = 0 \quad (1)$$

(équation de continuité)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) + (\operatorname{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \left(\Delta_2 \vec{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) \right) \quad (2)$$

(équation des quantités de mouvement)

De ces deux équations, on peut déduire (en écriture indiciale avec la convention de sommation classique) la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla_j \rho v_j v_i = f_i - \nabla_i p + \mu \nabla_j \nabla_j v_i + \frac{\mu}{3} \nabla_i \nabla_j v_j \quad (4)$$

Si l'on néglige la viscosité ($\mu = 0$) on peut déduire de (1) et de (4) :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p + \nabla_i \nabla_j \rho v_j v_i \quad (5)$$

Pour les écoulements qui nous préoccupent ici (faible nombre de Mach, petites fluctuations de p et de ρ autour d'une valeur moyenne), l'on pourra tirer de l'équation d'état :

$$p/\rho^\gamma = \text{Cte} \quad (3)$$

la relation $dp = c^2 d\rho$ (c étant la vitesse du son $= \sqrt{\gamma p/\rho}$) donc transformer (5) en :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla_i \nabla_j \rho v_j v_i = 0 \quad (6)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 v_i \nabla_i \frac{\partial p}{\partial t} + v_i v_j \nabla_i \nabla_j p \right) + \rho_0 (\nabla_i v_j) (\nabla_j v_i) = 0$$

($\rho_0 =$ valeur moyenne de ρ)

ou :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 (\nabla_i v_j) (\nabla_j v_i) = 0 \quad (7)$$

Cette dernière forme met en évidence l'entraînement de la fluctuation de pression par le courant fluide.

Il est intéressant de décomposer la vitesse en trois parties :

- une partie constante dans le temps \bar{v} ;
- une partie turbulente v' , définie comme solution fluctuante des équations en incompressible;
- une partie de propagation d'ondes \tilde{v} .

En négligeant les produits de termes fluctuants entre eux, on obtient finalement comme équation pour la pression :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 \bar{v}_i \nabla_i \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v}_i \bar{v}_j \nabla_i \nabla_j p \right) + 2 \rho_0 (\nabla_i \bar{v}_j) (\nabla_j \tilde{v}_i) = - 2 \rho_0 (\nabla_i \bar{v}_j) (\nabla_j v'_i)$$

Le terme $S = - 2 \rho_0 (\nabla_i \bar{v}_j) (\nabla_j v'_i)$ joue le rôle d'une source de fluctuation de pression due à la turbulence. Le terme $2 \rho_0 (\nabla_i \bar{v}_j) (\nabla_j \tilde{v}_i)$ est un terme de couplage entre la fluctuation de pression et la fluctuation de vitesse. Il ne joue de rôle notable que lorsque les gradients de la vitesse moyenne sont importants; dans ce cas on ne peut plus parler d'équation d'onde pour la pression, indépendamment des fluctuations de vitesse. C'est ce qui se passe en particulier pour les changements de section, les coudes, les bifurcations, il est alors souvent préférable de revenir au sys-

tème initial : équation de conservation de masse, équations de conservation de quantité de mouvement. Dans le chapitre 3, une étude particulière sera faite pour déterminer l'influence de ce terme en cas de rétrécissements ou d'élargissement dans des circuits tubulaires.

Dans les grandes cavités, où il est nécessaire d'étudier la propagation des ondes dans toutes les directions, ce terme peut en général être négligé, ainsi d'ailleurs que le terme d'entraînement dû à la vitesse moyenne. On retrouve alors l'équation d'onde classique :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = S \quad (8)$$

Avec la condition aux limites $\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} p = 0$ sur les parois.

2.2 Etude du terme source dû à la turbulence :

$$S = - 2 \rho_0 \nabla_i \bar{v}_j \nabla_j v'_i$$

Une étude très détaillée de ce terme sort du cadre de ce rapport. On peut cependant déduire de son expression un certain nombre de résultats importants :

a) L'intensité du bruit émis par une zone turbulente sera sensiblement proportionnelle au gradient de la vitesse moyenne et à l'intensité de la turbulence.

Dans un circuit, les principales sources seront donc à chercher en des endroits assez instables (là où les deux facteurs sont importants) : élargissements brusques, divergents, obstacles dans le courant fluide par exemple et à un degré moindre dans les couches limites des parois.

b) Dans une géométrie donnée, comme l'intensité de turbulence $\sqrt{v'^2}$ est sensiblement proportionnelle à la vitesse moyenne, l'intensité des sources de bruit est sensiblement proportionnelle à la pression dynamique.

c) Le spectre de puissance de la source est semblable au spectre de puissance des vitesses turbulentes. En particulier, la fréquence moyenne de ce spectre varie proportionnellement à la vitesse moyenne. Dans la plupart des cas on doit s'attendre à trouver un spectre de source assez étalé, et décroissant lorsque la fréquence augmente.

Les géométries excitatrices dangereuses sont celles pour lesquelles le spectre de source de bruit est relativement étroit, avec une fréquence moyenne voisine de fréquences propres mécaniques ou acoustiques du circuit. En pratique, ce type de spectre doit se rencontrer surtout dans le cas d'obstacles dans le courant fluide présentant une certaine périodicité : grilles, rangées de tuyaux, par exemple.

2.3 Définition d'un modèle d'étude des amplifications.

Pour étudier la propagation et l'amplification des ondes sonores dans un circuit, on peut donc proposer le modèle suivant :

Le circuit est décomposé en deux types principaux d'éléments :

a) Des tuyaux longs et étroits dans lesquels les vitesses d'écoulement peuvent être importantes, où il est nécessaire de prendre en compte les effets d'amortissement dus au frottement sur les parois et aux changements de section mais où la propagation peut être étudiée en ondes longitudinales planes. L'étude pour ces tuyaux se fait sur les équations monodimensionnelles déduites des équations générales (1, 2,3) et linéarisées.

3. — Propagation dans les tuyaux

b) Des grandes cavités où la vitesse est faible, mais où il n'est plus possible de considérer un système d'ondes à une seule dimension. L'équation utilisée est l'équation d'onde (8).

Ces éléments peuvent être disposés en parallèle ou en série.

Le raccordement des éléments tubulaires entre eux et avec les cavités se traduit mathématiquement pour les éléments adjacents par les relations d'égalité des pressions et de nullité de la somme des débits entrants. Il peut se faire également par l'intermédiaire de « sources de débit ou de pression ». Il se représente alors par des équations du type $\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1 = \Delta p(t)$ ou $\rho S(\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1) = \Delta Q(t)$ (S étant la section de l'élément tubulaire au niveau de la source) (*).

Les fluctuations de débit et de pression dans les circuits sont en général suffisamment faibles vis-à-vis du débit moyen et de la pression moyenne, pour que l'on puisse traiter le circuit comme un système linéaire et appliquer les méthodes usuelles d'étude de la réponse d'un système linéaire à une sollicitation aléatoire.

La grandeur importante à considérer est la fonction de transfert pour tout point du circuit : c'est-à-dire la réponse en amplitude et en phase en tout point du circuit pour la pression et le débit, à une sollicitation sinusoïdale de pression ou de débit, de fréquence donnée, en un point (réponse considérée en tant que fonction de cette fréquence).

Les paragraphes suivants sont consacrés essentiellement à l'étude des méthodes de calcul de cette fonction de transfert, dont le calcul effectif est réalisé par le programme Vibraphone.

Il suffit alors de connaître l'intensité et les spectres de puissance des sources de bruit localisées aux différentes singularités du circuit pour pouvoir déterminer le spectre complet du bruit dans le circuit. Dans la plupart des cas, ces sources sont indépendantes et peuvent être étudiées expérimentalement sur des maquettes représentant séparément chaque singularité; cependant, un couplage assez important peut exister dans le cas de singularités rapprochées.

Remarque 1 : Un tel schéma de calcul ne prend en compte dans les zones turbulentes que la partie des fluctuations de pression susceptibles de se propager en dehors de cette zone en ondes planes dans les tuyaux et en ondes sphériques dans les cavités. Au niveau de ces zones, les fluctuations de pression mesurées comprendront en plus des fluctuations « locales » qui ne se transmettront pas aux autres points du circuit, mais qui peuvent avoir des effets locaux importants, et compliquer la détermination expérimentale des sources de bruit effectivement transmissibles.

Remarque 2 : Dans tout ce rapport, le couplage entre les fluctuations dans le fluide et les vibrations mécaniques de la structure n'est pas pris en compte. Bien entendu, l'étude de la propagation des fluctuations de pression dans les circuits (chapitre 3 et suivants) reste valable quelle que soit l'origine des fluctuations, tant que les fluctuations mécaniques ne jouent pas de rôle dans la propagation elle-même; cette situation est pratiquement réalisée dans les circuits de réacteurs, compte tenu de la rigidité des structures qui doivent pouvoir résister à des pressions statiques fortes. Mais il ne faudrait pas appliquer telle quelle cette étude à la propagation des fluctuations dans un fluide peu compressible parcourant un tube souple.

3.1 Passage des équations générales aux équations monodimensionnelles.

Traiter le problème de la propagation des ondes planes conduit à réduire les équations tridimensionnelles à des équations monodimensionnelles.

Ecrivons le système de l'équation de continuité et de l'équation vectorielle des quantités de mouvement sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i \vec{v}) &= \vec{f} - \operatorname{grad} p + \mu \left[\Delta_2 \vec{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) \right] \end{aligned} \right\} (9)$$

Par l'intégration dans une tranche de tube dx et par la projection des équations ainsi obtenues sur l'axe Ox du tube nous obtenons le système :

$$\left. \begin{aligned} S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ S \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{\rho S} \right) - Sf + K \frac{Q^2}{2 \rho S} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

S étant la section du tube à l'abscisse x , Q le débit-masse, α un coefficient dû à la non-constance de la vitesse dans une section droite.

Le terme $K Q^2 / 2 \rho S$ représente la perte de charge due à la viscosité. ($K = \Lambda / D_h$ avec $D_h =$ diamètre hydraulique du tube, $\Lambda =$ coefficient de frottement sans dimension. Dans le cas d'un tube lisse en régime turbulent $\Lambda = 0,2 \operatorname{Re}^{-0,2}$, Re étant le nombre de Reynolds).

3.2 Linéarisation et transformation par Fourier des équations monodimensionnelles.

Joignons au système (10), l'équation d'état du fluide (adiabatique) :

$$p = k p^\gamma \quad (11)$$

Soient $p_1(x, \omega)$, $Q_1(x, \omega)$, $\rho_1(x, \omega)$ les transformées de Fourier des fluctuations de p , Q , ρ par rapport aux p_0 , Q_0 , ρ_0 de l'écoulement permanent (fluctuations généralement petites devant les grandeurs permanentes).

Si nous considérons l'écoulement permanent comme étant incompressible et la vitesse du son (c) correspondant à cet écoulement comme étant constante, nous avons :

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \text{Cte}, & \rho_0(x) &= \text{Cte}, \\ S(x) v_0(x) &= \text{Cte} = \frac{Q_0}{\rho_0} \end{aligned}$$

Nous pouvons à partir de (10) et (11) écrire le système (12) liant les grandeurs p_1 , Q_1 , ρ_1 :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= c^2 \rho_1 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{i \omega S}{c^2} p_1 &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{V_0}{c} \right)^2 \right] S \frac{\partial p_1}{\partial x} + 2 V_0 \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \left(\frac{V_0}{c} \right)^2 \left(\frac{dS}{dx} - 0,4 K_0 S \right) p_1 \\ &+ \left(i \omega - 2 \frac{V_0}{S} \frac{dS}{dx} + 0,9 K_0 V_0 \right) Q_1 = 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

(*) On peut également imposer à l'un des bouts de l'élément tubulaire une fluctuation de vitesse \tilde{v} ou de pression \tilde{p} donnée.

REMARQUE : Pour l'obtention du système (12), il a été implicitement supposé que le profil de l'écoulement fluctuant était le même que le profil de l'écoulement permanent. C'est une hypothèse commode, mais qui n'a pas actuellement à notre connaissance de justification théorique ou expérimentale.

3.3 Détermination des matrices de transfert d'éléments tubulaires simples.

Nous appellerons matrice de transfert d'un élément tubulaire, la matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} Q_{IS} \\ p_{IS} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Q_{IE} \\ p_{IE} \end{pmatrix}$$

(Q_{IE} et p_{IE} , Q_{IS} et p_{IS} étant les valeurs de Q_1 et de p_1 à l'entrée et à la sortie de l'élément).

(Ces grandeurs ainsi que A sont des fonctions de ω .)

Cette matrice A peut être explicitée à partir de (12) dans un certain nombre de cas particuliers simples. (Dans le cas général ses coefficients peuvent être calculés numériquement pour un ω déterminé) :

1) tube à section constante : (de longueur L et de section S)

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 L} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 L} & \frac{S i \omega}{c^2} \left[-\frac{e^{\lambda_1 L}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_2 L}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \\ \frac{c^2}{S i \omega} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 L} - e^{\lambda_2 L}) & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 L} \end{pmatrix}$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique :

$$(c^2 - v_0^2) \lambda^2 - (2i\omega v_0 + 0,4 K_0 v_0^2) \lambda + \omega^2 - 0,9 i K_0 \omega v_0 = 0$$

si $v_0 \ll c$ $A \approx \begin{pmatrix} \cos \beta L & \frac{S \omega}{i \beta c^2} \sin \beta L \\ -\frac{i \beta c^2}{S \omega} \sin \beta L & \cos \beta L \end{pmatrix}$ avec $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - i \frac{K_0 v_0}{\omega}}$

2) rétrécissement brusque : (de section d'entrée S_E , de section de sortie S_S et de longueur nulle)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Q_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{S_E^2} - \frac{1}{S_S^2} \right) & 1 \end{pmatrix}$$

(Q_0 = débit permanent au niveau du rétrécissement).

3) élargissement brusque : (mêmes notations)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2 Q_0}{\rho S_E^2} \frac{S_E}{S_S} \left(1 - \frac{S_E}{S_S} \right) & 1 \end{pmatrix}$$

4. — Propagation dans les cavités de grande dimension

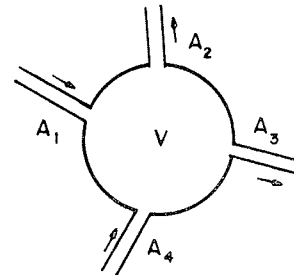
Nous avons vu au paragraphe 2.3 b que, pour l'étude de la propagation des ondes dans les grandes cavités d'un circuit parcouru par un fluide, il n'était plus possible d'utiliser un système d'onde à une seule dimension et que l'équation de propagation à utiliser était l'équation d'onde :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = S \tag{8}$$

avec les conditions aux limites $\vec{n} \cdot \text{grad } p = 0$ sur les parois.

4.1 Détermination des équations reliant les fluctuations de pression et de débit à l'entrée des tubes qui débouchent dans un grand volume.

Soit une cavité de grande dimension V dans laquelle débouchent en A_1, A_2, \dots, A_n , n tubes du circuit dont les sections transversales sont petites devant les dimensions de V. Dans les tubes A_1, A_2, \dots, A_n le sens positif est pris dans le sens de la vitesse permanente. Soit $S_{A_1}, S_{A_2}, \dots, S_{A_n}$ les sections des tubes au niveau de A_1, A_2, \dots, A_n .



Dans V, nous supposons la vitesse permanente négligeable même au voisinage des zones A_1, A_2, \dots, A_n .

4.1.1 POSITION DU PROBLÈME

Si nous supposons qu'à l'intérieur de V il n'y ait pas de source, l'équation vérifiée par la fluctuation de pression en tout point de V est :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

En transformant par Fourier cette équation, nous obtenons :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \tag{13}$$

$p = p(M, \omega)$ = fonction d'espace et de ω .

Conditions aux limites : En dehors des zones :

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

la condition aux limites pour $p(M)$ est (M appartenant à la paroi) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \tag{14}$$

(sens positif = sens de la normale intérieure \vec{n} .)

Si nous supposons que dans les zones A_1, A_2, \dots, A_n l'onde sonore est plane et se propage normalement à la surface de V. On pourra tirer de la troisième équation du système (12) que :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{A_i} = (-1)^{\alpha_i} \frac{i \omega}{S_{A_i}} Q_{A_i} \tag{15}$$

(i variant de 1 à n.)

(les Q_{A_i} étant les fluctuations de débit dans les tubes au niveau de V.

$\alpha_i = 1$ si le sens positif du tube i aboutit à V;
 $\alpha_i = 0$ si le sens positif du tube i part de V.)

L'équation (13) assortie de ses conditions aux limites sur la dérivée normale en tout point de la surface S de V, a une solution unique dans V. Nous pouvons donc écrire que :

$$p(M, \omega) = f(M, Q_{A_1}, Q_{A_2}, \dots, Q_{A_n}, \omega)$$

et que par conséquent :

$$p_{A_i} = f(A_i, Q_{A_1}, Q_{A_2}, \dots, Q_{A_n}, \omega)$$

pour i variant de 1 à n .

Ces équations représentent les n relations qui lient les fluctuations de débit et de pression aux points A_i . Ce sont ces relations que nous allons expliciter maintenant.

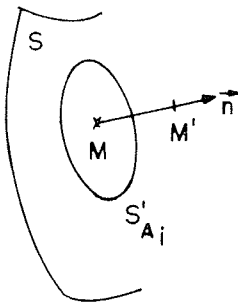
4.1.2 TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION (13).

Nous savons qu'une équation différentielle munie de conditions aux limites non homogènes peut être remplacée par une équation avec conditions homogènes, obtenue en ajoutant à l'équation initiale un terme source convenablement choisi.

Nous remplacerons ici le système (13, 14, 15) par le système :

$$(16) \quad \begin{cases} \Delta p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\alpha_i} \frac{i\omega}{S_{A_i}} Q_{A_i} \delta_{A_i} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S = 0 \text{ en tout point de S} \end{cases}$$

Les δ_{A_i} sont des fonctions d'espace définies comme suit :



Si $M \in S$ et si $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$
 $\delta_{A_i}(M) = \delta(r) \mathcal{F}_{A_i}(M)$

avec :

$\delta(r)$ étant la fonction de Dirac et

$$\mathcal{F}_{A_i}(M) = 1 \text{ si } M \in S_{A_i} \text{ et } 0 \text{ si } M \notin S_{A_i}$$

4.1.3 PROJECTION SUR LES FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN.

Soit $f_p(M)$ ($M \in V$) une suite complète de fonctions propres orthonormées de l'opérateur laplacien muni de la condition aux limites $(\partial/\partial n)_S = 0$:

$$\int_V \delta_{A_i} f_p(M) d\tau = S_{A_i} \overline{f_p(A_i)}$$

$$\left[\overline{f_p(A_i)} = \frac{1}{S_{A_i}} \int_{S_{A_i}} f_p(M) d\sigma \right]$$

En projetant l'équation du système (16) sur les $f_p(M)$, nous obtenons :

$$p(M, \omega) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\alpha_i} i\omega Q_{A_i} \sum_p \frac{\overline{f_p(A_i)}}{(\omega/c)^2 - \lambda_p^2} f_p(M) \quad (17)$$

(λ_p^2 étant la valeur propre correspondant à $f_p(M)$).

D'où le système (en moyennant $p(M)$ sur les surfaces S_{A_i}) :

$$p_{A_i} = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{\alpha_j} i\omega Q_{A_j} \sum_p \frac{\overline{f_p(A_j)} \overline{f_p(A_i)}}{(\omega/c)^2 - \lambda_p^2} \quad (18)$$

4.2 Introduction de l'amortissement aux parois.

L'amortissement des ondes sonores lors de leur réflexion sur une paroi naît en général d'une fluctuation spatiale de cette paroi. La condition aux limites $(\partial p/\partial n)_S = 0$ n'est plus valable.

On caractérise en général le mouvement de la paroi par une « impédance de surface » : $\xi = -(p/v_n)$ (v_n étant la composante de la vitesse normale à la paroi), on peut encore écrire $\xi = i\omega\rho/(\partial p/\partial n)$.

La nouvelle condition aux limites est donc :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S = \frac{i\omega\rho}{\xi} p$$

On démontre que, en première approximation, l'introduction de cette nouvelle condition aux limites peut être prise en compte en remplaçant la valeur propre λ_p^2 dans l'expression (18) par :

$$\lambda_p'^2 = \lambda_p^2 - \frac{i\omega}{c} \left(\frac{\rho}{\xi}\right) \iint_S f_p^2(M) d\sigma \quad (19)$$

(Cette expression est valable si $\rho c/\xi \ll 1$).

L'impédance de surface est en général une quantité complexe. (19) montre que c'est sa partie réelle qui contribue à l'amortissement.

Dans les problèmes de circuits de réacteur qui nous préoccupent, où les systèmes mécaniques sont compliqués, l'impédance de surface est une quantité très difficile à calculer car il n'y a pas de lien direct entre la pression qui s'exerce en un point de la surface et la vitesse v_n de la paroi au point considéré. Il faudrait pouvoir, pour déterminer ξ , calculer la réponse mécanique du circuit aux fluctuations de pression du fluide qui s'exercent sur lui.

On peut cependant penser que certaines expériences simples pourront en donner un ordre de grandeur.

Cas particulier : Dans le cas d'un problème monodimensionnel on montre que l'on peut remplacer l'équation d'onde (non amortie) :

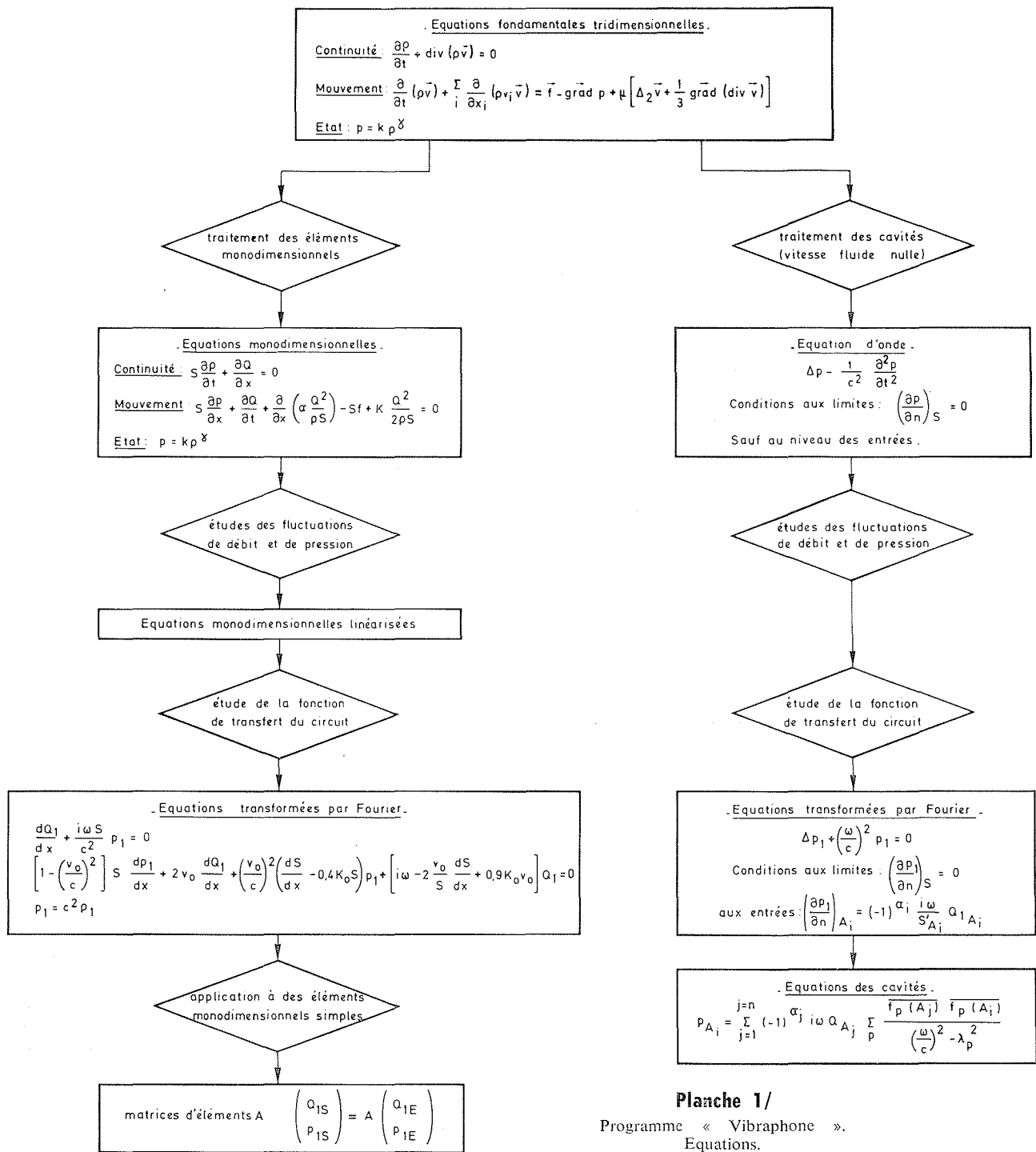
$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0$$

par :

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c} - \frac{i\rho c}{2\xi} \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}}\right)^2 p = 0$$

(\mathcal{S} étant la section droite du tube, \mathcal{P} son périmètre.)

Les valeurs propres et fonctions propres, dans certaines géométries simples du laplacien sont données en annexe IV.



5. — Méthode de calcul du programme Vibraphone

L'ensemble des équations correspondant à tous les éléments du circuit, les équations correspondant aux grands volumes, et celles correspondant aux jonctions des éléments entre eux, par l'intermédiaire de sources ou non, peut être regroupé sous la forme d'un système linéaire liant les Q_{1E} , p_{1E} , Q_{1S} , p_{1S} de chaque élément.

Ce système est résolu par tous les ω désirés. On obtient donc en chaque point de jonction entre deux éléments le module et la phase de la fluctuation du débit et de la pression. En comparant au module et à la phase des sources,

on peut en déduire à toute fréquence la valeur de la fonction de transfert en tout point du circuit.

6. — Utilisation pratique du programme Visualisation

6.1 Rappel sur l'organe de visualisation.

L'organe de visualisation est une console IBM 2250 branchée sur l'ordinateur IBM 360-91 du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay. Cette console comporte essentiellement un tube cathodique où s'affichent les tableaux et les cour-

bes, et un crayon électronique (light pen) permettant de repérer des zones déterminées de l'écran qui sont ensuite reconnues par programme.

Le light pen donne notamment la possibilité de choisir différentes options du programme dont le texte est affiché sur l'écran. Un clavier alphanumérique complète le light pen. Il permet l'entrée de constantes.

6.2. Version conversationnelle du programme Vibraphone.

Cette version a été décrite dans le but de simplifier la mise en œuvre du programme Vibraphone. Dans une exploitation classique les données sont introduites par cartes et l'on attend la sortie des résultats avant d'entreprendre de nouveaux calculs. Avec la version conversationnelle, au contraire, un dialogue s'établit en permanence entre l'ordinateur et le physicien. Il est alors possible de demander de nouveaux calculs en tenant compte des résultats obtenus précédemment.

Aussi, cette méthode se prête-t-elle particulièrement bien à l'étude des résonances d'un circuit en fonction d'un paramètre, par exemple la variation de longueur d'un ou plusieurs éléments.

Il est en effet très simple d'effectuer une modification quelconque des données du circuit et de relancer le calcul avec les nouvelles données.

Un dialogue est également possible au niveau de l'étude des résultats : le physicien dispose, après calcul, de l'ensemble des résultats d'un cas. Il peut visualiser uniquement les résultats qui lui paraissent intéressants sous la forme de courbes ou de tableaux.

6.3. En ce qui concerne l'exploitation du programme Vibraphone la procédure varie selon qu'il s'agit d'un cas unique ou d'un ensemble homogène de cas relatifs à un même problème.

1) Pour l'étude d'un cas unique, les données transmises par cartes perforées sont lues, analysées et éventuellement modifiées à la console. Puis l'exécution des calculs est lancée. Dans l'analyse des résultats obtenus les courbes et tableaux que l'on peut visualiser à l'écran sont :

- des courbes donnant l'amplification en un point du circuit ou l'amplification maximale en fonction de la fréquence;
- des profils d'ondes stationnaires à des fréquences déterminées;
- des tableaux résumant les caractéristiques vibratoires du circuit pour les diverses fréquences de résonances.

2) Dans la comparaison de plusieurs cas, on a choisi de suivre l'évolution d'une résonance particulière en fonction de la variation du paramètre de l'étude.

L'organigramme des opérations est décrit sur la planche n° 2, on notera qu'il est fait appel en plus de l'unité de visualisation à des fichiers sur disques où l'on peut écrire les données et l'ensemble des résultats d'un ou plusieurs cas.

Il est intéressant pour terminer de signaler que la modification des données se fait par l'intermédiaire d'un sous-programme « DONNÉE » d'un caractère très général et pouvant être employé pour gérer les données d'un module de calcul quelconque.

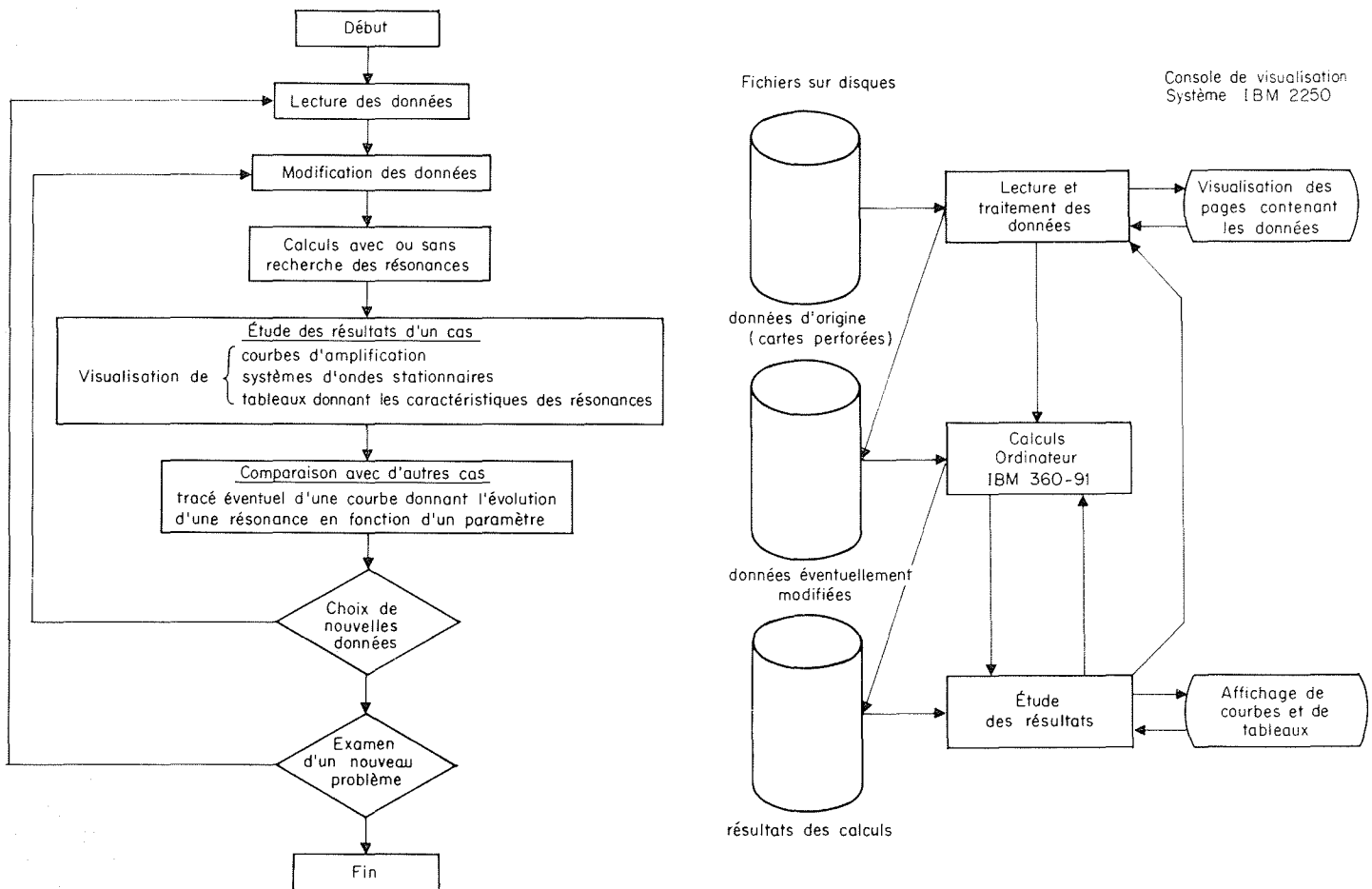


Planche 2/

Organigramme théorique et pratique du programme « Vibraphone » version conversationnelle.

2^e partie

1. — Présentation du circuit des échangeurs Chinon III Données du problème

1.1 Le système d'échangeurs Chinon III.

Il est constitué par quatre boucles identiques. Une boucle se compose des éléments suivants :

1) *Un collecteur chaud* qui conduit le CO₂ du réacteur pour le distribuer par l'intermédiaire de 24 piquages diamétralement opposés deux à deux dans :

2) *12 paires de bouteilles d'échangeurs identiques.*

Une bouteille est constituée par une entrée chaude située à sa base, une partie ascendante cylindrique où le CO₂ surchauffe l'eau circulant dans des petits tubes disposés parallèlement à l'écoulement gazeux, une partie descendante annulaire composée essentiellement d'un vaporiseur et de deux économiseurs qui forment trois ensembles de rangées de petits tubes d'eau disposés en hélice transversalement à l'écoulement du gaz. Le CO₂ refroidi est alors conduit par l'intermédiaire d'un tube d'environ 8 m de long (queue de bouteille) dans :

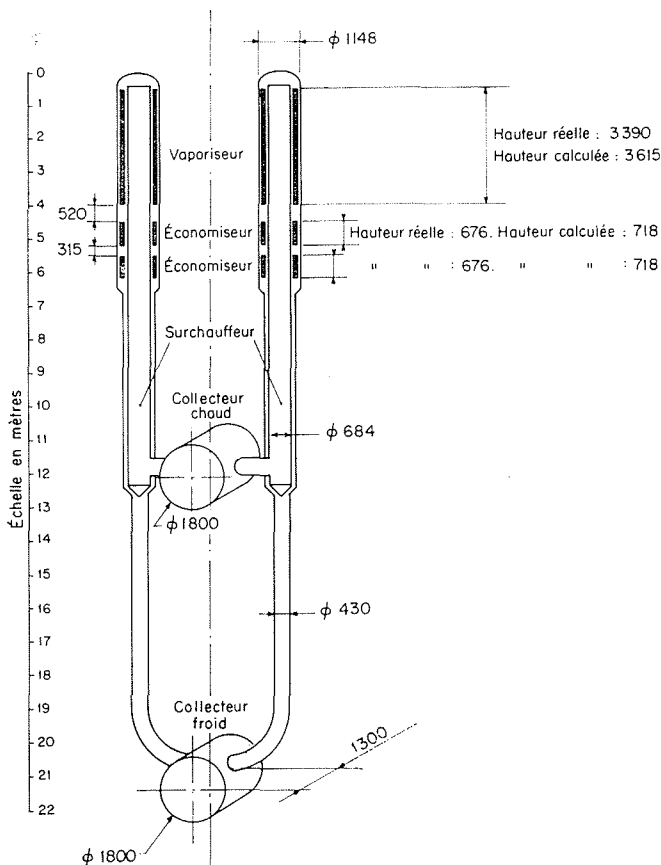


Planche 3/

Chinon 3. Circuit des échangeurs.
Représentation simplifiée pour les calculs.

3) *Un collecteur froid* (de même diamètre que le collecteur chaud) dont les 24 piquages font un angle d'environ 120° deux à deux. Ce collecteur, par l'intermédiaire d'une soufflante ramène le CO₂ froid au réacteur.

(Au régime nominal la température du collecteur chaud est de 375 °C, celle du collecteur froid est de 215 °C).

Le raccordement de la partie ascendante avec la partie descendante de la bouteille se fait par un volume quasi-cylindrique dont le diamètre est voisin du diamètre extérieur de la bouteille.

1.2 Position et données du problème.

Le problème des échangeurs Chinon III s'est posé de la manière suivante :

A partir d'un certain régime des soufflantes (1 900 tr/mn) une vibration de 96 Hz environ apparaît dans l'ensemble des structures du circuit et se maintient jusqu'à l'apparition vers 2 300 tr/mn, d'une vibration à environ 113 Hz-115 Hz beaucoup plus intense, cette vibration disparaît à son tour vers 2 900 tr/mn pour être remplacée par une vibration (plus localisée au niveau des bouteilles) de 146 Hz environ (très intense elle aussi).

Les premières mesures effectuées sur le site, ainsi que le fait que, dans de larges plages de vitesse des soufflantes (donc de vitesse du fluide), la fréquence soit fixe, ont conduit à penser que l'on a affaire ici à un phénomène d'origine sonore dont la ou les sources sont vraisemblablement dues à l'influence d'obstacles placés dans le courant fluide. Les rangées de tubes transverses du vaporiseur et des économiseurs apparaissent vite comme étant les seules singularités susceptibles d'avoir un spectre en fréquence suffisamment étroit pour exciter tour à tour diverses résonances acoustiques du système (la fréquence centrale de ce spectre variant linéairement avec la vitesse du fluide).

Cette hypothèse est confirmée par le fait que la fréquence la plus dangereuse (113 Hz) correspond au premier mode acoustique transversal du collecteur froid.

Des expériences, faites sur une bouteille dans laquelle on souffle de l'air à la pression atmosphérique, ont été entreprises pour étudier de façon plus précise ce phénomène et les moyens d'éliminer ces fluctuations.

Simultanément le programme Vibraphone a été mis en œuvre pour essayer de retrouver les fréquences de résonance acoustique, tout d'abord d'une bouteille isolée puis du système complet « bouteilles-collecteurs » et ensuite de tester différents dispositifs susceptibles d'éliminer ces fréquences dangereuses.

2. — Problèmes posés par la recherche d'une représentation valable de la bouteille susceptible d'être traitée par le programme

Le circuit de la bouteille (voir planche 3) est trop compliqué pour pouvoir être traité, sans simplifications préalables, par le programme.

Le fait que n'apparaissent expérimentalement qu'un nombre réduit de fréquences acoustiques longitudinales (les fréquences transversales étant éliminées par des cloisons dans les parties annulaires de la bouteille), montre que certaines zones du circuit doivent favoriser certaines fréquences de résonance par rapport à d'autres. Il est donc important de les représenter fidèlement dans le calcul, les autres zones pouvant être très simplifiées.

2.1 Détermination et représentation des zones critiques de la bouteille.

La bouteille peut être représentée par une succession d'éléments (en série). Les points délicats de cette représentation sont de plusieurs natures :

d'une part de nature plutôt géométrique :

- conditions à l'entrée et à la sortie du circuit;
- représentation du sommet de la bouteille;
- représentation de la zone complexe des économiseurs et du vaporiseur;

d'autre part de nature plutôt acoustique :

- position, nombre, corrélation des sources;
- problème des amortissements.

L'étude a donc consisté à essayer différents types de représentations pour ces points délicats, à déceler quels sont le ou les points critiques (zones dont la modification entraîne des effets importants sur les résultats), à déterminer la représentation donnant le résultat le plus proche possible de l'expérience.

2.1.1 ETUDE DES POINTS DÉLICATS DE LA REPRÉSENTATION. DÉTERMINATION DES ZONES CRITIQUES.

1) Entrée et sortie du circuit.

L'atmosphère impose une pression constante à l'entrée et à la sortie du circuit. Nous prendrons donc une condition aux limites de fluctuation de pression nulle en ces points (nœud de pression). Cependant la position exacte de ce nœud par rapport à l'entrée ou à la sortie géométrique du circuit est difficile à déterminer.

Pour la sortie : du fait qu'au voisinage de l'atmosphère, l'onde sonore ne peut plus être considérée comme plane.

Pour l'entrée : ce phénomène est compliqué par la présence du ventilateur qui perturbe l'écoulement.

Le calcul montre dans ce cas que de petites modifications de longueurs de tube au voisinage de l'entrée et de la sortie du circuit n'ont aucun effet sur les fréquences de résonances et leur amplification (il faut comme nous le verrons plus tard une variation représentant un pourcentage important du quart de la longueur d'onde pour avoir un certain effet).

2) Sommet de la bouteille.

Il peut être représenté soit, de façon simplifiée, par un tube à section constante dont la longueur est le parcours moyen du fluide depuis la fin du surchauffeur jusqu'au début du vaporiseur, soit par un volume cylindrique avec une entrée cylindrique et une sortie annulaire.

L'étude de ces deux représentations nous a montré que cette zone a une influence assez grande sur la position du premier nœud de pression de l'onde stationnaire dans la partie descendante de la bouteille (donc une importance assez grande pour les fréquences de résonances et leurs simplifications) et que la deuxième représentation, plus conforme à la réalité donne sur ce point un bon accord avec l'expérience.

3) Zone vaporiseur-économiseurs.

Soit S_0 la section de la partie annulaire de la bouteille dans cette zone et S_1 la section de passage du CO_2 à travers les petits tubes. La zone vaporiseur-économiseurs peut être en première approximation représentée par trois tubes de section S_1 séparés par des tubes de section S_0 . Mais une représentation plus fine est possible en considérant chaque zone de petits tubes comme une succession pé-

riodique de petits éléments à section variable. Le calcul de l'annexe I montre que cela conduit à remplacer la longueur géométrique L de chaque zone de petits tubes et la section S_1 par une longueur ($L' > L$) et une section ($S' > S_1$) équivalentes.

Le calcul a montré que toute modification même très faible dans la zone vaporiseur-économiseur a une grande influence sur le système d'onde stationnaire et sur les fréquences de résonances et leur amplification (nous précisons d'ailleurs dans le chapitre suivant l'influence de cette zone). Le choix de la représentation fine mentionnée ci-dessus s'impose donc et permet de retrouver avec exactitude les résultats expérimentaux (voir graphiques 1 et 2).

4) Problème des sources et des amortissements.

Nous savons que la position des sources ne peut agir que sur l'amplification relative des différentes fréquences de résonance et en fait cette action est limitée à certaines positions singulières (voisinage des nœuds de débit des ondes stationnaires). Dans la réalité la source étant vraisemblablement répartie dans toute la zone des tubes, il suffira de choisir pour le calcul une source unique placée en un point non singulier. Nous avons placé pratiquement la source en fin de zone vaporiseur-économiseurs.

Les amortissements, situés essentiellement dans la zone des petits tubes, ont été pris en compte dans le calcul en considérant les divers facteurs de perte de charge du circuit (changement de section, coefficient de rugosité des tubes, etc.). Sur ce point le calcul n'a pas pu être recalé sur l'expérience car les pics de résonance expérimentaux sont trop étroits pour qu'on puisse déterminer leur largeur (on observe en fait la largeur due au filtre). De toute façon, ceci montre que les amortissements sont sans doute faibles et que par conséquent ils n'ont d'action que sur l'intensité absolue des résonances (que de toute façon le programme ne peut donner puisqu'il ne permet pas de déterminer l'intensité des sources sonores).

2.2 Comparaison avec l'expérience. Conclusion.

Nous avons donc vu que pour obtenir une bonne concordance entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience, nous ne pouvions pas nous contenter, dans la représentation de certaines parties de la bouteille (zone des petits tubes — sommet de la bouteille) d'une représentation schématique mais qu'il fallait au contraire tenir compte de certains détails dont l'importance n'était pas a priori évidente.

La représentation élaborée ci-dessus nous sera utile par la suite, dans le calcul de l'effet de différents dispositifs atténuateurs sur les résonances du circuit.

3. — Etude en air de différents dispositifs atténuateurs

Différents dispositifs susceptibles d'éliminer les deux résonances dangereuses de 113-115 Hz et de 146 Hz (qui correspondent aux 114 et 143 Hz trouvés dans les expériences en air) ont été testés expérimentalement sur le circuit de la « bouteille en air » et en même temps par le calcul.

Pour des raisons technologiques des dispositifs situés en dehors de la zone des petits tubes ont tout d'abord été expérimentés. Leur faible succès a conduit à envisager une action au niveau des petits tubes.

Du point de vue de leur représentation par le calcul, ces dispositifs ne posent pas de problème particulier exceptés les dispositifs du type « résonateur ».

3.1 Représentation des résonateurs.

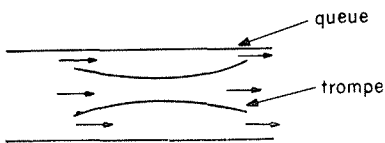
Nous savons qu'un résonateur peut se schématiser par un grand volume V débouchant dans un circuit ou dans l'atmosphère par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs petits tubes (longueur l_i , section s_i) de volumes petits par rapport à V .

Au voisinage de sa fréquence fondamentale le résonateur a une pression qui fluctue en phase dans tout le grand volume. La forme de ce volume n'a donc que peu d'importance. Les paramètres qui comptent sont V , l_i , s_i . Nous voyons donc qu'un résonateur peut être facilement représenté par le calcul à condition de bien connaître ces paramètres. Or si V et les s_i ne posent pas de problème, dans le cas d'un résonateur constitué par une cavité percée de trous, les quantités l_i ne peuvent être assimilées à la simple épaisseur de la paroi. Il est donc nécessaire de déterminer des longueurs équivalentes correctes donc de résoudre au voisinage des trous l'équation d'onde tridimensionnelle. Un calcul du rapport l/s équivalent pour un ensemble de trous percés dans une cavité est donné dans l'annexe II.

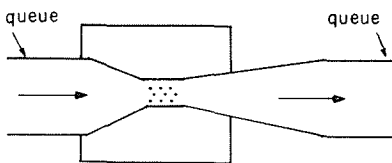
3.2 Dispositifs placés en dehors de la zone des petits tubes.

Les dispositifs qui ont été essayés sont de plusieurs types :

- a) Des longueurs variables de queue supplémentaires.
- b) Placés dans la queue à des positions variables :
 - des trompes exponentielles créant un déphasage de la fluctuation de pression dans une section droite de la queue



- des tubes venturi à col percé de trous communiquant avec un grand volume de fluide mort.



- c) Une cavité résonante placée à la base de la bouteille et communiquant avec le circuit par des rangées de trous de diamètre et en nombre variables.

Nous n'étudierons pas en détail l'action de ces différents dispositifs (dont certains ont été abandonnés en raison de la perte de charge qu'il occasionnaient). Nous remarquons cependant en regardant les courbes d'atténuation du « 114 Hz » en fonction du paramètre variable du dispositif (le « 143 Hz » étant insensible à tous les dispositifs) que le calcul détermine correctement la plage d'atténuation et l'atténuation elle-même (graphiques 3 et 4). Mais il permet surtout de comprendre le phénomène physique.

En effet, d'une part nous voyons sur les courbes d'ondes stationnaires (graphiques 5 et 6) que toute modification faite en dehors de la zone des petits tubes n'entraîne que très peu de glissement de l'onde au niveau même des petits tubes (aucun pour le « 143 Hz ») alors que dans la zone

annulaire aval et dans la queue de la bouteille l'onde peut être déphasée de π . D'autre part ce glissement très léger s'accompagne également d'un petit déplacement de la fréquence de résonance (déplacement difficilement perceptible par l'expérience). Si nous portons (pour le « 114 Hz » par exemple) sur un graphique l'amplification à la résonance en fonction de la fréquence de résonance, pour toutes les modifications faites en dehors de la zone des petits tubes par n'importe quel dispositif (il s'agit là bien sûr de grandeurs calculées), nous voyons que tous les points se regroupent suivant une courbe unique présentant un pic vers 113 Hz (graphique 7).

Toutes ces observations nous confirment donc que la fréquence de résonance de « 114 Hz » est caractéristique non pas tellement du circuit dans son ensemble mais plutôt de la zone des petits tubes et elles nous permettent de penser que des dispositifs placés en dehors de cette zone ne peuvent agir dans certains cas qu'en provoquant un désaccord entre l'onde stationnaire dans la dite zone avec celle du reste du circuit.

Ces désaccords n'existent que dans des conditions bien particulières et difficilement transposables au « cas du réacteur », il semble plus efficace d'agir au niveau des petits tubes. Mais cette intervention plus délicate technologiquement a été envisagée en dernier lieu.

3.3 Résonateurs débouchant dans la zone des tubes.

Le lecteur trouvera en annexe 3 un calcul de l'effet d'un résonateur débouchant dans un circuit. Disons ici que le résonateur tend, au voisinage de sa fréquence de résonance à imposer au niveau de son branchement un nœud de fluctuation de pression et qu'il est d'autant plus efficace sur l'onde stationnaire du circuit principal, qu'il se situe plus au voisinage d'un ventre de fluctuation de pression.

Le programme a permis de préciser les effets énoncés ci-dessus : il a déterminé essentiellement la plage de débattement des paramètres du résonateur correspondant à une atténuation aux résonances (il est à remarquer que les deux paramètres importants sont d'une part la fréquence qu'aurait le résonateur s'il était en communication avec l'atmosphère, d'autre part son volume).

Des expériences faites sur le circuit en air de la bouteille munie de résonateurs à fond mobile, ont recoupé de façon satisfaisante ces plages (graphique 8).

Le programme a permis également de vérifier qu'au moment où s'atténaient les fréquences de la zone « 114 Hz » et « 143 Hz » d'autres fréquences de résonance parasites ne prenaient pas une importance trop grande.

4. — Cas du réacteur

4.1 Mesures faites sur le site de Chinon III et leur dépouillement.

4.1.1 MESURES SUR L'INSTALLATION SANS DISPOSITIF ATTÉNUATEUR.

Nous avons dit (paragraphe 1.2) qu'apparaissent tout à tour un certain nombre de fréquences de résonance, lors de la montée en vitesse des soufflantes. Des mesures précises ont été faites, pour une température de sortie du réacteur de 390 °C. On observe alors successivement les fréquences de 96 Hz, 112 Hz et 116 Hz, enfin 146 Hz. Les phénomènes vibratoires les plus intenses ont lieu pour le 112 Hz et le 116 Hz (170 dB). Tout d'abord des spectres

(donnant la valeur crête à crête moyenne de la fluctuation de pression en fonction de la fréquence) ont été tracés, pour différents nombres de tours de la soufflante. Sur ces spectres apparaissent des pics correspondant aux différentes fréquences mentionnées ci-dessus. Nous avons sélectionné dans les figures 1 et 2, les spectres correspondant au nombre de tours soufflante pour lequel chacune des résonances est la plus amplifiée.

Remarque : Les fluctuations de pressions en différents points du circuit (zone interéconomiseur et zone du vaporiseur de plusieurs bouteilles) ont été ainsi étudiées. Les spectres obtenus sont très voisins d'une position à l'autre.

C'est ainsi qu'il apparaît que la meilleure façon de représenter l'état vibratoire en un point du système consiste à tracer un diagramme donnant en fonction du nombre de tours soufflante l'amplitude du signal de pression filtré à travers un filtre passe-bande de largeur 2 Hz calé successivement sur les quatre fréquences de résonance (96 Hz - 112 Hz - 116 Hz - 146 Hz) (figure 3).

Par ailleurs des cartes d'ondes stationnaires de pression ont été relevées sur le circuit d'une bouteille, le réacteur étant en fonctionnement, et cela pour les quatre fréquences précédentes.

Un changement de la température du réacteur a montré que les fréquences précédentes présentaient un glissement dû à la variation de la vitesse du son mais que l'amplification et le système d'ondes stationnaires correspondant présentaient une grande stabilité.

4.1.2. MESURES SUR L'INSTALLATION MUNIE D'UN RÉSONATEUR PLACÉ AU NIVEAU DU VAPORISEUR.

Au paragraphe 3.3. nous avons vu que les expériences en air ont montré qu'il s'agit là du dispositif le plus efficace pour atténuer les fréquences dangereuses. La Société Babcock-Atlantique a pu ainsi proposer la mise en place d'un résonateur débouchant dans chaque bouteille par deux orifices, l'un placé au niveau d'un ventre du 112 Hz et 116 Hz, l'autre au niveau d'un ventre du 146 Hz, ceci à la hauteur du vaporiseur. Un tel dispositif est représenté sur le graphique 12. Le problème était le dimensionnement de la hauteur de ce résonateur.

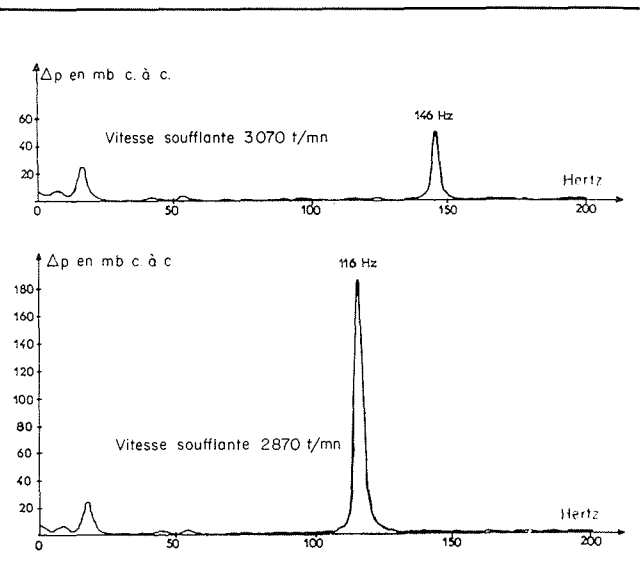
Expérimentalement nous avons tracé sur le site, le réacteur étant en fonctionnement, des diagrammes analogues à ceux de la figure 3 pour des résonateurs ayant différentes hauteurs. Pour chaque fréquence de résonance l'atténuation a donc pu être tracée en fonction de ce paramètre.

4.2 Représentation du circuit du réacteur utilisable par le programme Vibraphone.

La représentation du circuit est voisine de celle qui a été suivie lors de l'interprétation des essais en air. Cependant il a fallu ici représenter correctement les collecteurs, et les résonateurs (d'une géométrie plus compliquée que celle des résonateurs utilisés dans les expériences en air). Il a fallu tenir compte d'un gradient de température dans la bouteille. (Il suffit pour cela de découper le circuit en éléments suffisamment petits, le calcul a montré cependant que la finesse de découpage n'avait pas besoin d'être très grande).

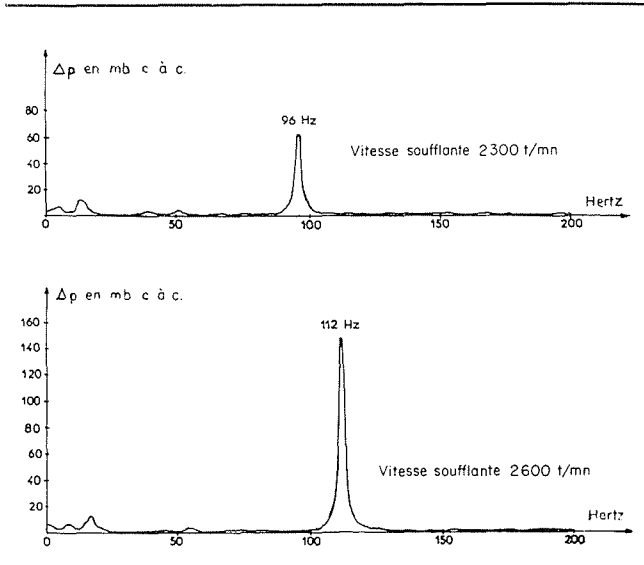
4.2.1. REPRÉSENTATION DES COLLECTEURS FROIDS ET CHAUDS.

Ils peuvent être exactement représentés chacun par un grand volume cylindrique comportant douze paires d'entrées espacées régulièrement. Mais cette représentation est



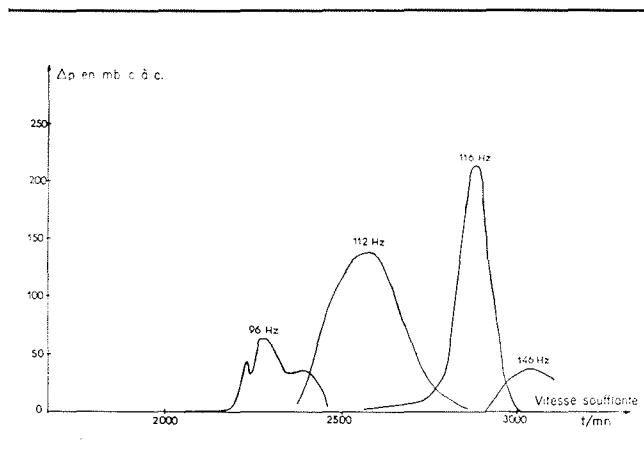
1/

Spectres des fluctuations de pression à 146 et 116 Hz.



2/

Spectres des fluctuations de pression à 112 et 96 Hz



3/

Spectre global des fluctuations de pression

très lourde et les temps de calcul trop longs. Les dimensions longitudinales des collecteurs étant très grandes vis-à-vis de leurs dimensions transversales, nous pouvons n'en considérer qu'un tronçon dont la longueur est égale au pas (distance entre deux paires d'entrées) (voir planche 3).

Cette schématisation a été testée sur une maquette du collecteur froid construite par Babcock-Atlantique.

D'autre part, une cloison étant installée dans le plan de symétrie vertical du collecteur froid, nous avons respecté la symétrie du circuit en plaçant une source de fluctuation de pression identique dans les deux bouteilles.

4.2.2. REPRÉSENTATION DES RÉSONATEURS.

Nous avons traité le résonateur à deux entrées en circuit unidimensionnel (les dimensions radiales du volume le composant étant petites vis-à-vis de la longueur d'onde). Nous avons tenu compte (voir annexe II) des effets d'entrées de chacun des trous et de leur interaction.

4.3 Exploitation du programme Vibraphone. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

4.3.1. CIRCUIT SANS RÉSONATEUR.

La comparaison calculs-expériences a porté sur les mêmes points que pour les expériences en air. Le graphique 9 met en évidence l'importance relative des résonances; les quatre zones de fréquences où il y a amplification y apparaissent nettement. Les graphiques 10-11 montrent que le calcul détermine correctement les systèmes d'ondes stationnaires correspondants.

4.3.2. CIRCUIT AVEC RÉSONATEURS.

Des courbes d'atténuation en fonction de la hauteur du résonateur ont été calculées pour chaque fréquence de résonance (nous donnons ici (graphiques 13 et 14) celles correspondant aux deux résonances les plus amplifiées). Nous voyons, malgré la dispersion des résultats expérimentaux une bonne concordance (détermination de la plage d'atténuation et de son amplitude qui est plus faible que dans les expériences en air).

Conclusion

L'étude par le programme Vibraphone des vibrations acoustiques observées dans les échangeurs du réacteur nucléaire Chinon 3 a permis de mettre en évidence l'in-

térêt de cette méthode de calcul pour l'analyse acoustique des circuits complexes. On peut considérer comme acquis les points suivants :

- le profil des ondes stationnaires est bien calculé;
- la détermination des résonances ou des groupes de résonances amplifiées est satisfaisante;
- pour un dispositif atténuateur donné, dépendant d'un paramètre, le domaine de variation de ce paramètre correspondant à une atténuation est en général correctement obtenu, l'amplitude de l'atténuation étant en moyenne plutôt sous-estimée.

En l'absence d'information sur le niveau des sources, l'amplification absolue obtenue par le programme n'a pu être valablement testée et il serait souhaitable de disposer d'expériences de détermination précise de l'amortissement dû à l'écoulement dans des singularités usuelles de circuits industriels.

En fait, la plus grande inconnue pour la prévision des vibrations dangereuses reste la détermination a priori du spectre de fréquence et de l'intensité de la source de bruit créé par les tourbillons de Karmann dans des séries de tubes, ou dans d'autres singularités, ainsi que des conditions dans lesquelles cette source peut être amplifiée acoustiquement. La poursuite d'études fondamentales expérimentales et théoriques sur cette question est d'un grand intérêt.

Références

- Y.N. CHEN. — Vibrations des colonnes de gaz dans les faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur, créées par les tourbillons alternés de Bénard-Karmann, (VIII^e Journées de l'Hydraulique).
- DETREY. — Sous-programme conversationnel de gestion de données : « Donnée », Note E.D.F., HF 034/70/059.
- DUMAS. — Contribution à l'étude des spectres de turbulence, IMST, Marseille.
- GIBERT, LIVOLANT. — Sources et amplification des bruits dans un circuit, programme « Vibraphone », rapport SPM n° 1120.
- LIGHTHILL. — On Sound Generated Aerodynamically, *Proceeding of the Royal Society A* 211, p. 564.
- LIVOLANT. — Etude de l'amplification des bruits dans un réacteur. Note SPM n° 721.
- MORSE. — Vibration and Sound, *Mc Graw Hill Book*, (1948).
- MORSE and BOLT. — Sound waves in rooms, *Rev. Mod. Phys.* n° 16 (1944).

EXPLICATIONS COMPLÉMENTAIRES A PROPOS DES GRAPHIQUES

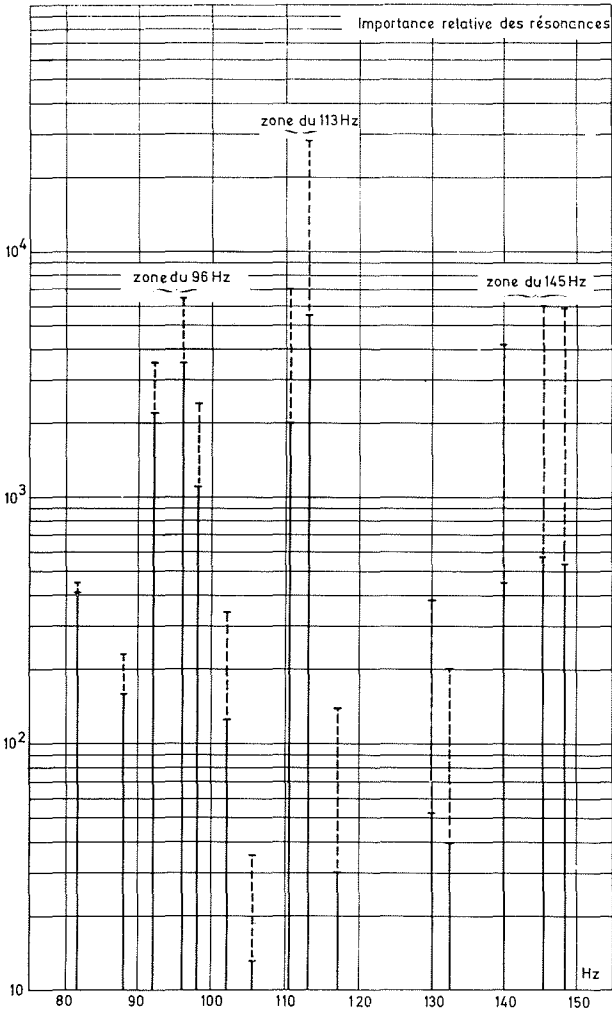
1. — Expériences "bouteilles en air"

1.1 Circuit sans dispositif atténuateur.

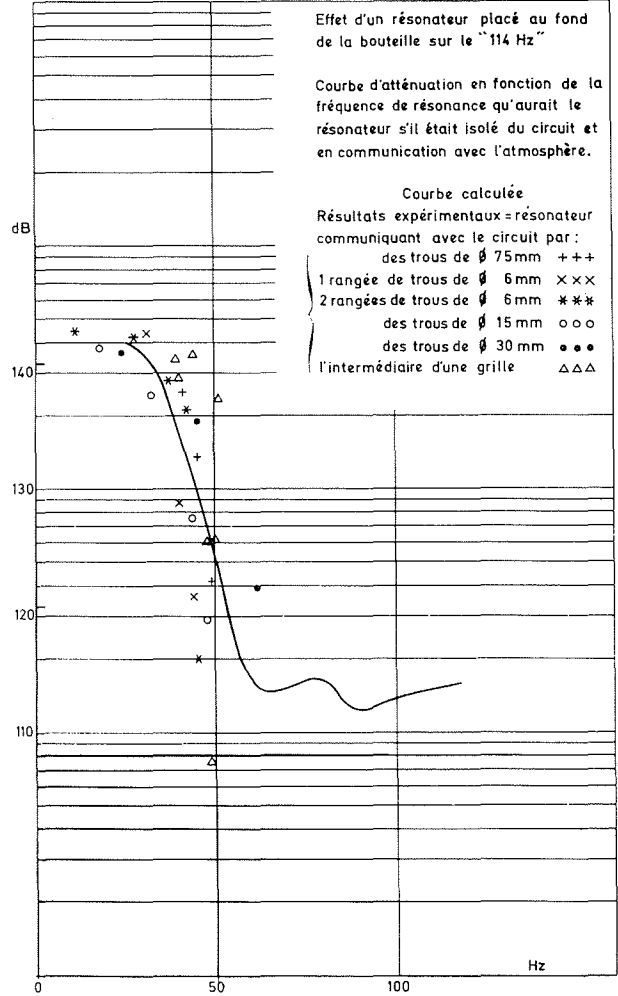
Le graphique 1 met en évidence les trois zones de fréquences où l'on peut observer des résonances acoustiques (la fréquence variant de 80 à 150 Hz). Les quantités $\sigma^2 = (\pi A \sqrt{L})^2$ (A = amplification à la résonance, L = largeur de la résonance) et $\sigma'^2 = (S \times \sigma)$ (S étant une source

proportionnelle à la pression dynamique du fluide) ont été portées pour chaque résonance trouvée par le calcul en fonction de la fréquence de résonance.

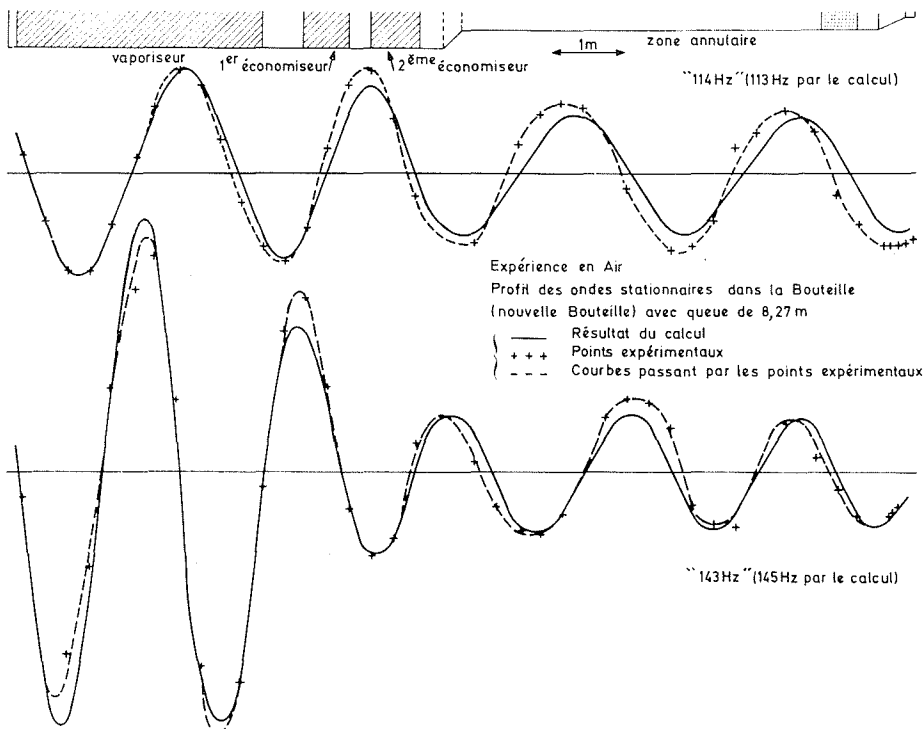
Le graphique 2 montre la concordance avec les relevés expérimentaux, des profils calculés pour les deux fréquences de résonance les plus amplifiées (113 Hz et 145 Hz par le calcul, 114 Hz et 143 Hz expérimentalement). Cette comparaison est faite dans la zone « délicate » de la bouteille (zone du vaporiseur et des économiseurs et zone annulaire avale).



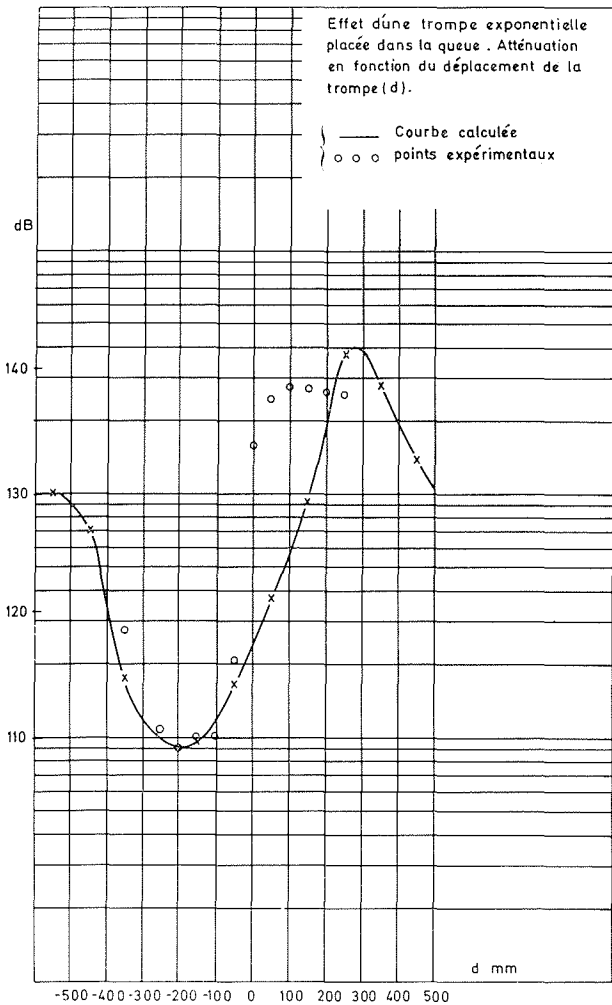
Graphique 1/
Expérience « Bouteille en air »



Graphique 3/
Expérience « Bouteille en air »



Graphique 2/



Expérience « Bouteille en air »

Graphique 4/

1.2 Dispositifs atténuateurs en dehors de la zone du vaporiseur-économiseurs.

Le graphique 3 montre l'effet (sur la fréquence de « 114 Hz ») d'un résonateur placé au fond de la bouteille et communiquant avec le circuit par des ensembles de trous. L'atténuation a été tracée en fonction de la fréquence de résonance qu'aurait le résonateur s'il était isolé du circuit et en communication avec l'atmosphère.

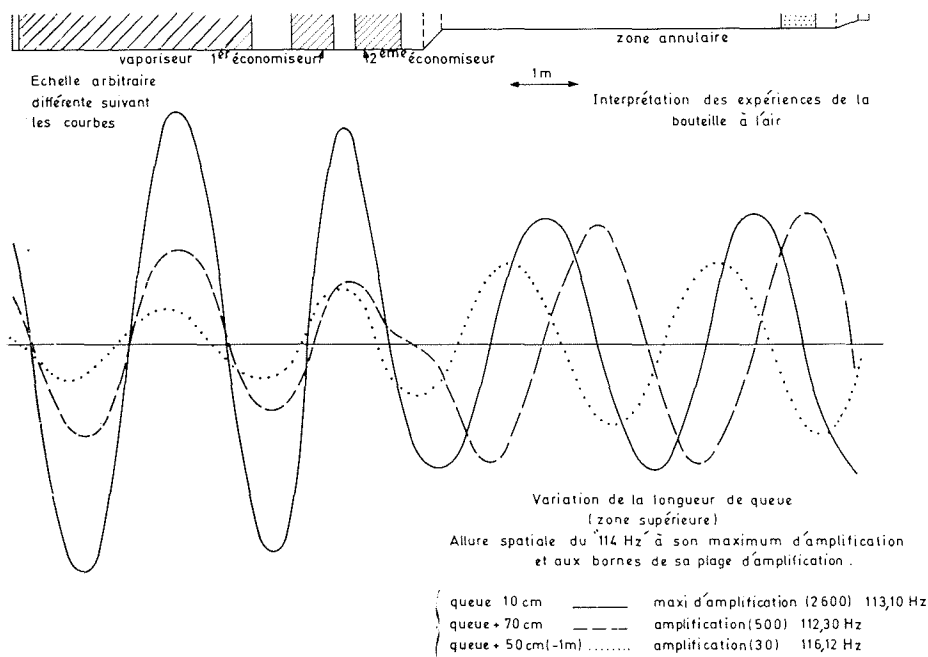
Le calcul a en effet montré que cette fréquence est le paramètre essentiel du résonateur (le 2^e paramètre étant son volume qui était fixé dans cette expérience). Il a fourni en outre une courbe d'atténuation en fonction de ce paramètre. Les abscisses des points expérimentaux ont été calculés à l'aide des formules données en annexe II, permettant de tenir compte de la répartition géométrique des trous.

Nous voyons sur le graphique que le calcul donne une bonne idée du seuil en fréquence de l'atténuation (malgré la dispersion des points expérimentaux) et retrouve bien l'importance de l'atténuation.

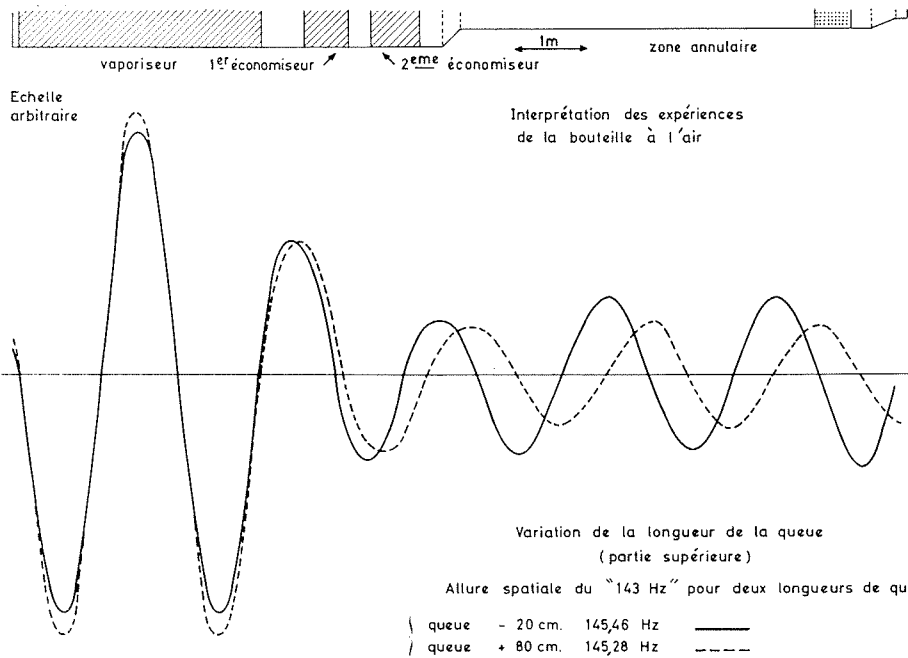
Le graphique 4 montre l'effet sur le 114 Hz également, d'une trompe à section de passage variant exponentiellement placée dans la queue de la bouteille. L'atténuation est tracée en fonction de la position de la trompe dans la queue. Le calcul donne encore une bonne idée de l'atténuation et détermine assez exactement la plage d'atténuation.

Remarque commune aux graphiques 3 et 4 : Le calcul ne peut donner qu'une amplification (c'est-à-dire une valeur relative de l'atténuation). De nombreux dispositifs ont été calculés; pour l'un d'eux la courbe calculée a été recalée en ordonnée par rapport à la courbe expérimentale, la concordance a été vérifiée pour les autres dispositifs.

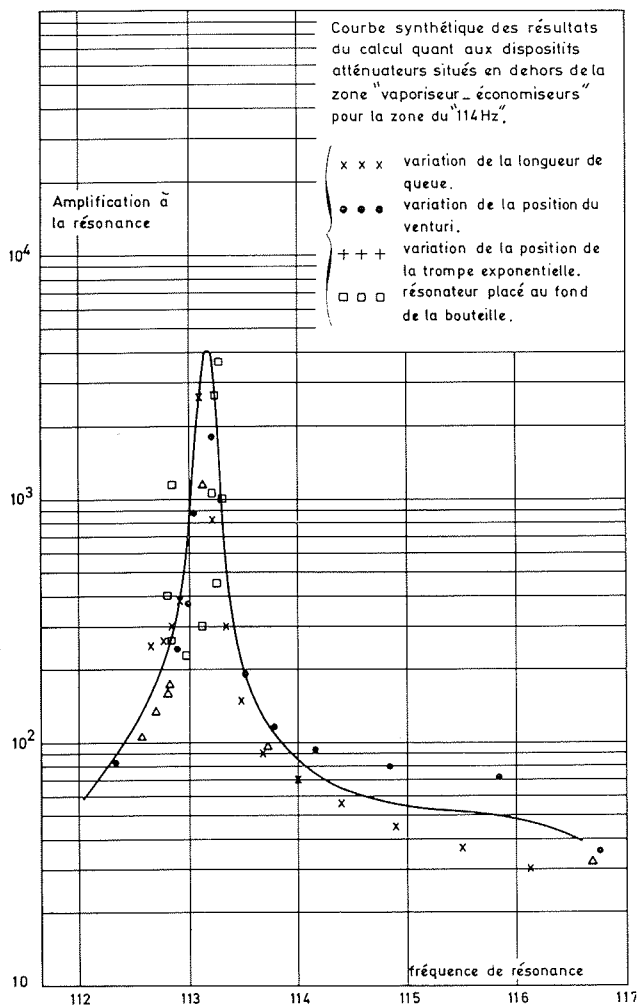
Les graphiques 5 et 6 montrent, pour le « 114 Hz » et le « 143 Hz », l'évolution de l'onde stationnaire dans la zone « délicate » de la bouteille (cf. graphique 2) quand on fait varier un paramètre de la zone extérieure à la zone « vapo-



Graphique 5/

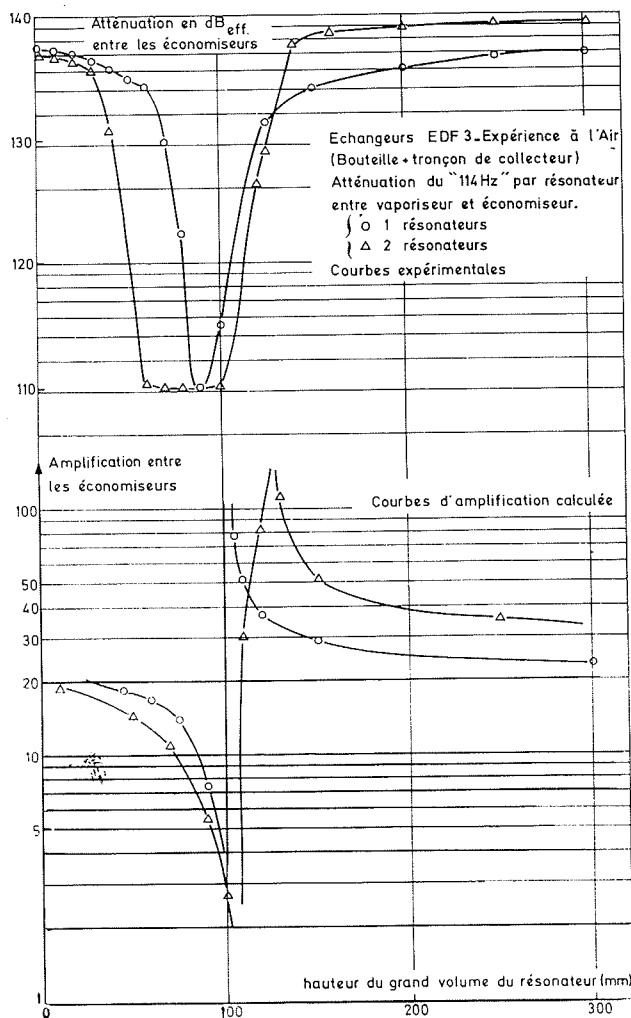


Graphique 6/

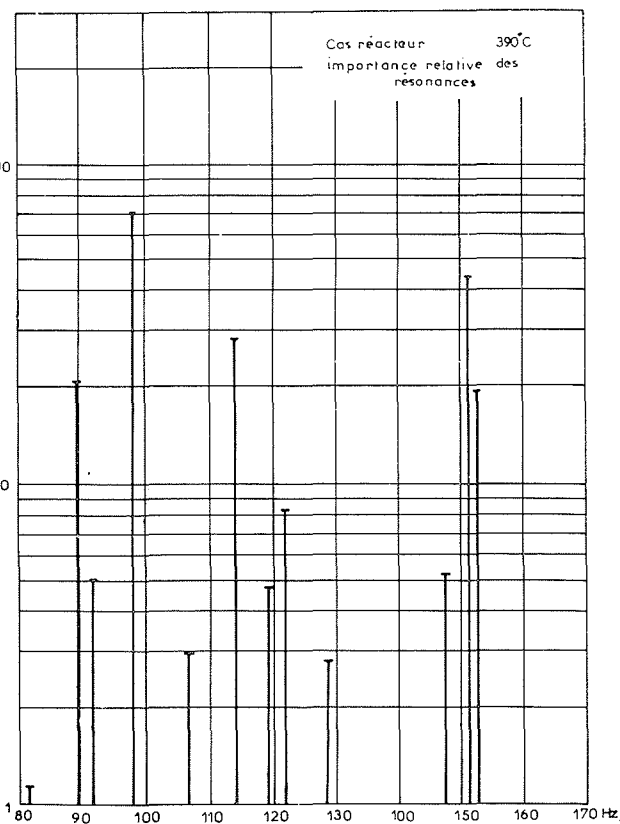
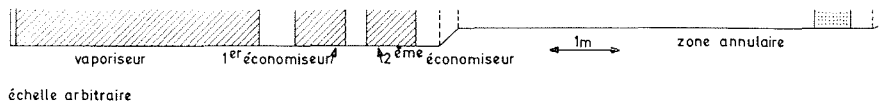


Expérience « Bouteille en air »

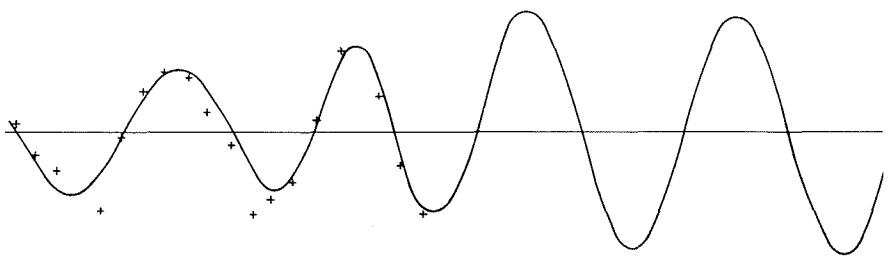
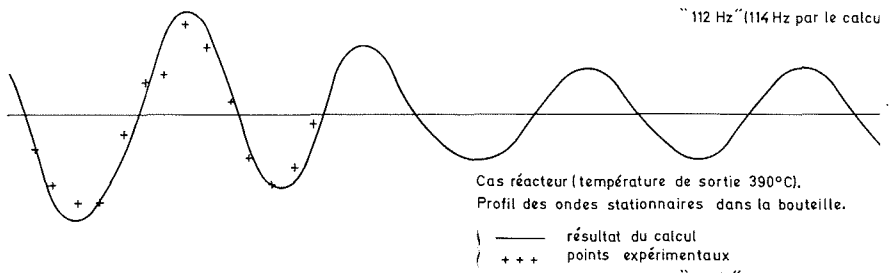
Graphique 7/



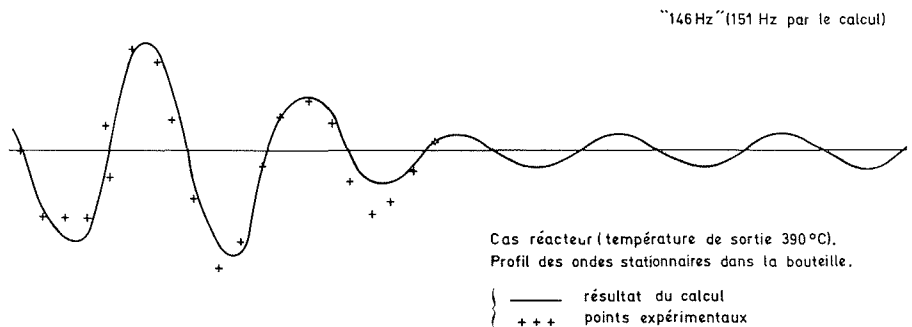
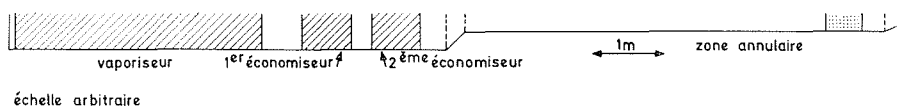
Graphique 8/



Graphique 9/



Graphique 10/



Graphique 11/

riser-économiseurs » (ici le paramètre est la longueur de la queue de la bouteille). Nous voyons que les nœuds du système d'ondes stationnaires dans la zone « vaporiseur-économiseurs » se déplacent beaucoup moins que ceux de la zone extérieure et sont quasiment fixes pour le « 143 Hz » (qui n'est atténué par aucun dispositif extérieur).

Sur le graphique 7 ont été tracés, pour tous les dispositifs atténuateurs, l'amplification calculée à la résonance en fonction de la fréquence de résonance correspondant au « 114 Hz » (suivant les dispositifs et leurs variations, cette fréquence glisse dans une zone allant de 112 Hz à 117 Hz). Nous voyons que l'ensemble des points ainsi obtenus se groupent suivant une courbe présentant un maximum pour 113 Hz. Cette courbe peut être considérée comme une caractéristique de la zone « vaporiseur-économiseurs ».

Toute modification extérieure n'entraînant, par une modification de l'accord des deux zones, qu'un déplacement de la résonance sur cette courbe.

Remarque commune aux graphiques 5, 6, 7. Ces graphiques montrent donc de façon différente l'importance de la zone « vaporiseur-économiseurs » dans la compréhension du phénomène de vibration des échangeurs EDF 3.

1.3 Dispositifs atténuateurs dans la zone « vaporiseur-économiseurs ».

Le graphique 8 montre l'effet d'un résonateur et de deux résonateurs placés entre le vaporiseur et le premier économiseur. L'atténuation est tracée en fonction de la hauteur du cylindre constituant le grand volume d'un des résonateurs, d'où deux courbes expérimentales et deux

courbes calculées correspondantes. Leur comparaison montre que le calcul centre correctement la plage d'atténuation, mais ne permet pas ici de déterminer avec la précision des graphiques précédents la largeur de cette plage.

2. — Cas du réacteur

2.1 Circuit sans dispositif atténuateur.

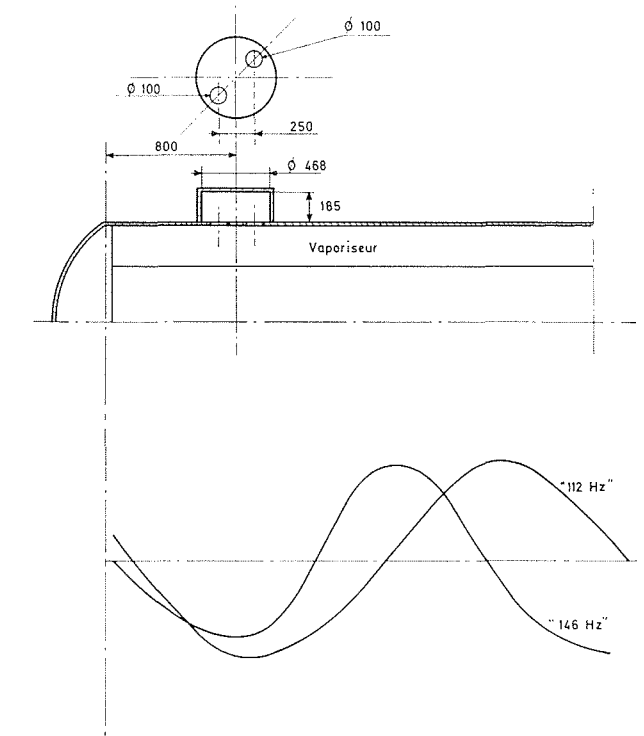
Le graphique 9 met en évidence les trois zones de fréquence où l'on peut observer des résonances acoustiques. Les résonances les plus amplifiées sont à 96 Hz - 114 Hz - 151 Hz. Sur ce graphique la quantité σ (cf. graphique 1) a été portée pour chaque résonance trouvée par le calcul en fonction de la fréquence de résonnance correspondante.

Il est à remarquer que le décalage qui existe entre les fréquences relevées expérimentalement (112 Hz - 116 Hz - 146 Hz) et celles calculées (114 Hz - 119 Hz - 151 Hz) est sans doute dû à une mauvaise connaissance des températures à l'intérieur de la bouteille.

Les graphiques 10 et 11 sont à rapprocher du graphique 2 des expériences en air.

2.2 Circuit avec résonateurs.

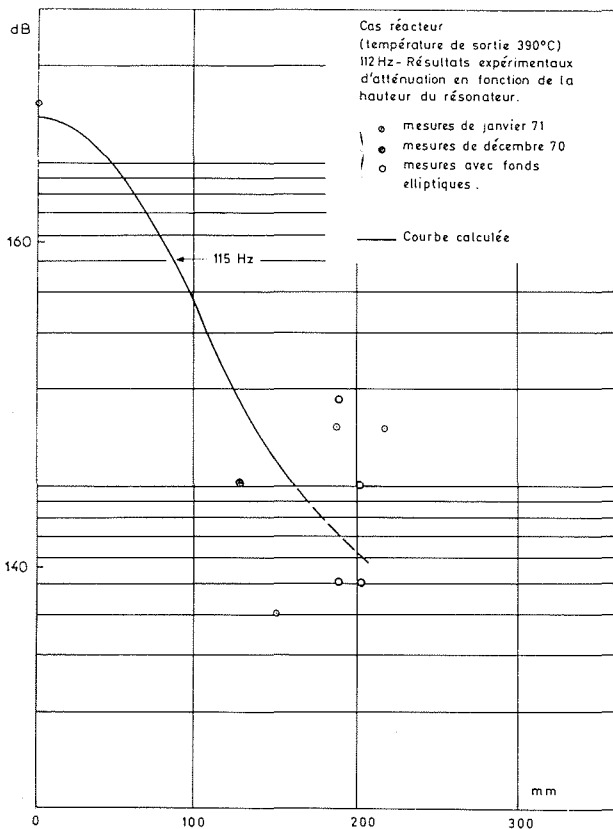
Les graphiques 13 et 14 sont à rapprocher du graphique 3. L'atténuation étant ici tracée en fonction de la hauteur du résonateur. Les résultats expérimentaux très dispersés ont été tracés en nuage de points.



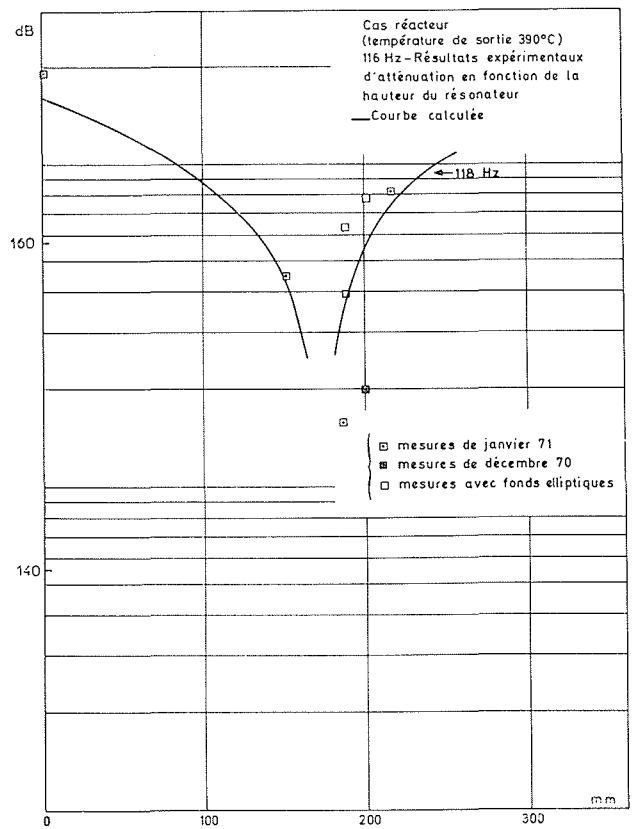
Graphique 12/

Dispositif atténuateur « Babcock Atlantique »

Position des entrées par rapport aux systèmes d'ondes stationnaires.



Graphique 13/

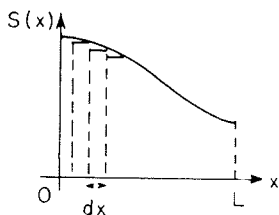


Graphique 14/

Annexe 1 **CALCUL DE LA LONGUEUR ET DE LA SECTION DU TUBE ACOUSTIQUEMENT ÉQUIVALENT A UN TUBE DE LONGUEUR ET DE SECTION DONNÉES DANS LEQUEL SE TROUVENT UNE SÉRIE DE RANGÉES DE PETITS TUBES TRANSVERSAUX**

Matrice de transfert d'un tube à section variable

Soit un tube de section variable $S(x)$ et de longueur L (pas trop grande devant la longueur d'onde sonore).



Si l'on découpe ce tube en N petits éléments de longueur dx petite devant la longueur d'onde sonore, la matrice de transfert $M(x)$ d'un petit élément situé à l'abscisse x sera :

$$M(x) \approx \begin{bmatrix} 1 & \frac{S(x)\omega}{ic^2} dx \\ -\frac{i\omega}{S(x)} dx & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice M de transfert du tube sera :

$$M = \prod_{i=1}^N M(x_i)$$

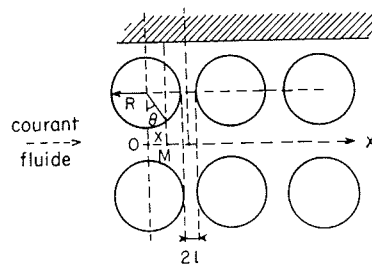
Si l'on fait le produit de deux matrices $M(x_i)$ et $M(x_{i+1})$ on obtient au premier ordre en dx :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{S(x_i) + S(x_{i+1})}{ic^2} dx \\ -i\omega dx \left(\frac{1}{S(x_i)} + \frac{1}{S(x_{i+1})} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

On peut donc dire approximativement que le tube à section variable est équivalent à un tube à section constant S' et de longueur L' telles que :

$$\left\{ \begin{aligned} S'L' &= \int_0^L S(x) dx \\ \frac{L'}{S'} &= \int_0^L \frac{dx}{S(x)} \end{aligned} \right.$$

Application à notre problème : Rangée de tubes transversaux à section circulaire.



Soit S_0 la section du tube, S_1 la section de passage entre les petits tubes.

Pour $0 \leq x \leq R$, on a :

$$\begin{aligned} S(x) &\approx S_0 - (S_0 - S_1) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \\ &= S_0 - (S_0 - S_1) \cos \theta \end{aligned}$$

Pour $R \leq x \leq R + e$, on a :

$$S(x) = S_0$$

Après intégration sur l'intervalle $[0, R + e]$, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{aligned} I &= \int_0^{R+e} S(x) dx = (R + e) S_0 - (S_0 - S_1) \frac{\pi R}{4} \\ J &= \int_0^{R+e} \frac{dx}{S(x)} = \frac{e}{S_0} - \frac{\pi R}{2(S_0 - S_1)} \\ &+ \frac{2RS_0}{(S_0 - S_1)\sqrt{(2S_0 - S_1)S_1}} \text{Arctg} \sqrt{\frac{2S_0 - S_1}{S_1}} \end{aligned} \right.$$

donc comme :

$$S'L' = I \frac{L}{R + e}$$

et

$$\frac{L'}{S'} = J \frac{L}{R + e}$$

$$\left\{ \begin{aligned} S'L' &= S_0 L - (S_0 - S_1) \frac{\pi R/4}{R + e} L \\ \frac{L'}{S'} &= \frac{e}{R + e} \frac{L}{S_0} - \frac{\pi R}{2(R + e)} \frac{L}{S_0 - S_1} + \frac{2R}{R + e} \\ &\times \frac{S_0}{\sqrt{(2S_0 - S_1)S_1}} \frac{L}{S_0 - S_1} \text{Arctg} \sqrt{\frac{2S_0 - S_1}{S_1}} \end{aligned} \right.$$

Annexe 2

PRISE EN COMPTE D'UNE VARIATION BRUSQUE DE SECTION DANS UNE ÉTUDE MONODIMENSIONNELLE EN ONDES PLANES

Il est parfaitement justifié de ne considérer pour les tubes longs que la propagation des ondes planes monodimensionnelles dans la gamme des fréquences allant de 0 à une fréquence de coupure ν_c qui est la première fréquence radiale du tube :

$$\nu_c \approx \frac{c}{2\pi} \times \frac{1,84}{R}$$

En effet, on démontre dans ce cas que toute perturbation introduite par rapport à l'onde plane en un point x_0 s'atténue spatialement plus rapidement que :

$$e^{-(2\pi\sqrt{\nu_c^2 - \nu^2}l/c) |x - x_0|}$$

Cependant, au voisinage des singularités (élargissements ou rétrécissements, coudes, par exemple), l'existence d'harmoniques dans la représentation de l'onde sonore entraîne que les conditions de couplage des ondes planes de part et d'autre de la singularité ne sont pas strictement celles considérées jusqu'à présent, c'est-à-dire la continuité des fluctuations de débit et de pression.

Le but de cette annexe est de calculer plus correctement ce couplage dans le cas des rétrécissements et élargissements, et d'appliquer les résultats au cas des résonateurs où cet effet joue un rôle essentiel.

En transformant l'équation d'onde :

$$\Delta P + \frac{\omega^2}{c^2} P = 0$$

par la formule de Green utilisant la solution particulière $h(r) = e^{-(i\omega r/c)}/r$, on obtient sur une surface S quelconque délimitant un volume V la relation :

$$2\pi P(N, \omega) + \int_S h(r) \text{grad } P \cdot \vec{n} ds - \int_{S'} P h'(r) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1)$$

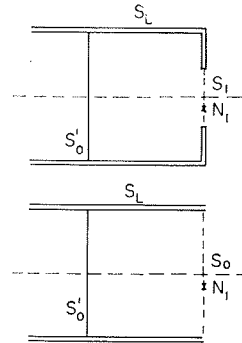
avec les notations :

- N : point de la surface S;
- \vec{n} : normale intérieure à la surface S au point courant N';
- r : distance NN';
- S' : surface S moins le voisinage du point N;
- \vec{u} : vecteur unitaire dirigé de N vers N'.

Remarque : Lorsque la surface S délimite un volume V fini, on peut adjoindre à l'équation (1) une équation (1') semblable avec $h(r)$ remplacé par :

$$\bar{h}(r) = \frac{e^{i\omega r/c}}{r}$$

L'équation (1), éventuellement complétée par (1') est l'équation de base de cette étude. Appliquons-la aux deux géométries suivantes, représentant un tube T avec et sans rétrécissement :



$$2\pi P(N_1) - \int_{S_1} \frac{dP}{dx} h(r) ds = \int_{S_0' + S_L} P h'(r) \vec{u} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_0'} \frac{dP}{dx} h(r) dS$$

$$2\pi P'(N_1) - \int_{S_0} \frac{dP'}{dx} h(r) dS = \int_{S_0' + S_L} P' h'(r) \vec{u} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_0'} \frac{dP'}{dx} h(r) dS$$

On suppose que la surface S_0' est suffisamment loin de S_1 pour que l'onde soit plane au niveau de S_0' et pour identifier les deux systèmes loin de la singularité, on pose sur S_0' :

$$P = P' \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dP'}{dx}$$

$P(N_1)$ est la pression au point N_1 lorsque l'on tient compte du rétrécissement, $P'(N_1)$ la pression que l'on aurait sans rétrécissement: $P'(N_1)$ est donc identique à la pression P_0 qui serait donnée par le code Vibraphone en sortie du tube T.

Sur la surface latérale S_L , P' et P peuvent devenir différents lorsqu'on se rapproche du rétrécissement, mais la différence est pondérée par le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{n}$ qui tend vers 0.

Les seconds membres des deux équations sont donc sensiblement égaux, et, par suite, les premiers membres. En moyennant sur S_1 , et en développant $h(r)$ au premier ordre en r , il vient, compte tenu de (1') :

$$P_1 - \frac{S_1}{2\pi} \left(\frac{\bar{1}}{r}\right)_{11} \frac{dP_1}{dx} \approx P_0 - \frac{S_0}{2\pi} \left(\frac{\bar{1}}{r}\right)_{10} \frac{dP_0}{dx} \quad (2)$$

$$S_1 \frac{dP_1}{dx} \approx S_0 \frac{dP_0}{dx} \quad (3)$$

avec les notations : $P_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} P(N_1) dS$

$$\left(\frac{\bar{1}}{r}\right)_{10} = \frac{1}{S_1 S_0} \int_{S_1} dS_1 \int_{S_0} dS_0 \frac{1}{r}$$

et l'approximation :

$$\frac{1}{S_1^2} \int_{S_1} dS_1 \int_{S_1} dS_1' \frac{dP}{dx}(N_1) \frac{\bar{1}}{r} \approx \left(\frac{1}{r}\right)_{11} \frac{dP_1}{dx}$$

Compte tenu de $S_0 dP_0/dx = -i\omega Q_0$, le système (2), (3) permet d'obtenir la matrice de rétrécissement :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\omega l_{01}}{S_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$l_{01} = \frac{S_1}{2\pi} \left[\left(\frac{\bar{1}}{r}\right)_{11} - \left(\frac{\bar{1}}{r}\right)_{10} \right]$$

Cette matrice est approximativement celle d'une portion de tube de section S_1 et de longueur l_{01} (l_{01} étant petit devant la longueur d'onde). Pour un élargissement de la section S_1 à la section S_2 , on a une matrice identique avec :

$$l_{12} = \frac{S_1}{2\pi} \left[\left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{11} - \left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{12} \right]$$

Un rétrécissement de S_0 à S_1 suivi d'un élargissement de S_1 à S_2 est équivalent à une longueur :

$$l = \frac{S_1}{2\pi} \left[2 \left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{11} - \left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{10} - \left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{12} \right]$$

On peut calculer (\bar{I}/r) pour des ouvertures circulaires :

$$\left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{11} = \frac{16}{3\pi R_1} \approx \frac{1,70}{R_1}$$

$$\left(\frac{\bar{I}}{r}\right)_{10} \approx \frac{16 R_1}{3\pi R_0} + \frac{2}{R_0^2} (R_0 - R_1) \approx \frac{2}{R_0} \left(1 - 0,15 \frac{R_1}{R_0}\right)$$

APPLICATION D'UN RÉSONATEUR

Compte tenu des expressions précédentes de $1/r$, on voit que dès que la section d'entrée du résonateur est faible vis-à-vis de la section interne du résonateur et de la section du tube sur lequel est branché le résonateur, on peut négliger les termes du type $(\bar{I}/r)_{10}$ devant le terme

principal $(\bar{I}/r)_{11}$. D'où finalement la longueur équivalente à ajouter à la longueur normale d'entrée du résonateur :

$$l = \frac{S}{\pi} \left(\frac{\bar{I}}{r}\right)$$

Pour une entrée circulaire :

$$l = \frac{16}{3\pi} R \approx 1,70 R$$

Pour une série de n ouvertures circulaires identiques, de section s et de rayon r , on peut obtenir des formules approchées :

$$l \approx s \times \left(\frac{16}{3\pi^2 R} + \frac{1}{\pi n} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} \right)$$

ou :

$$l \approx \frac{16}{3\pi} R + \frac{s}{\pi n} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$$

où d_{ij} est la distance moyenne entre les trous d'indice i et j .

Dans le cas de trous nombreux et rapprochés contenus dans un cercle de rayon R :

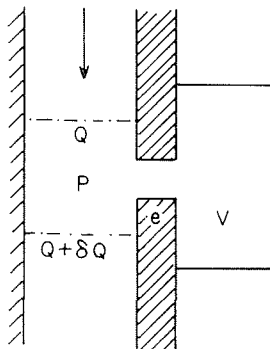
$$l \approx ns \times \frac{16}{3\pi^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{n} R} + \frac{1}{nr} \right)$$

Annexe 3

EFFET D'UN RÉSONATEUR A LA FRÉQUENCE ν

Soit :

- s : section d'entrée du résonateur;
- V : volume du résonateur;
- e : épaisseur de la paroi;
- d : diamètre du trou d'entrée;
- l : longueur corrigée d'entrée du résonateur :
 $l \approx e + 0,85 d$
- p : fluctuation de pression au niveau de l'entrée;
- Q : fluctuation de débit avant le résonateur;
- δQ : fluctuation de débit supplémentaire induite.



$$\delta Q = \frac{2\pi\nu}{ic^2} \left(\frac{V}{1 - \nu^2/\nu_0^2} \right) P$$

$$\nu_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{Vl}}$$

$\nu \ll \nu_0$

$$\delta Q \approx \frac{2\pi\nu}{ic^2} V p$$

L'effet du résonateur est équivalent à l'adjonction d'une longueur $L' = V/S'$ où S' est la section du tube sur lequel est branché le résonateur.

$\nu \gg \nu_0$

$$\delta Q \approx - \frac{2\pi\nu}{ic^2} \left(\frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right) p$$

Equivalut à retrancher une longueur :

$$L' = \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \frac{V}{S'}$$

Au voisinage de $\nu = \nu_0$, le crochet devient très grand. δQ étant nécessairement limité, $p \rightarrow 0$. Le résonateur tend alors à imposer un nœud de pression au branchement.

Annexe 4 VALEURS PROPRES ET FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE ET ANNULAIRE

Soit $f(r, \theta, z)$ une fonction propre de l'opérateur laplacien, λ^2 la valeur propre correspondant; nous avons :

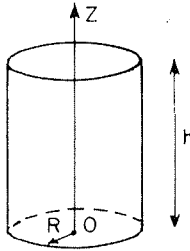
$$\Delta f + \lambda^2 f = 0$$

avec $\partial f / \partial n =$ dérivée normale $= 0$ sur la surface du volume V .

Si V est un cylindre de hauteur h et de rayon R .

Les fonctions propres sont données par :

$$f_{l,m,n}(r, \theta, z) = J_n\left(\frac{a_{nm}}{R} r\right) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \cos \frac{\pi l z}{h}$$



la valeur propre correspondante est :

$$\lambda^2 = \left(\frac{a_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{h}\right)^2$$

avec :

$n, l =$ entiers positifs ou nuls;

$m =$ entier positif;

$a_{nm} =$ ($m^{\text{ième}}$) zéro de $J'_n(x)$ $a_{01} = 0$ (ondes planes),
 $a_{11} = 1,84$ (premier mode transversal)...

$J_n(x) =$ première fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .

NORME DE f_{lmn} .

Si a_{nm} est différent de zéro :

$$|f_{lmn}| = \sqrt{\frac{\pi R^2 h}{4 \alpha \beta} \left(1 - \frac{n^2}{a_{nm}^2}\right)} J_n(a_{nm})$$

avec $\alpha = 1$ si $l \neq 0$ et $\alpha = 1/2$ si $l = 0$.

avec $\beta = 1$ si $n \neq 0$ et $\beta = 1/2$ si $n = 0$.

Si $a_{nm} = 0$:

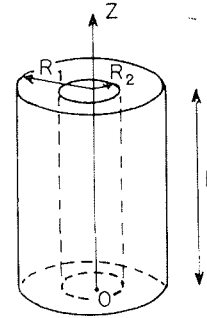
$$|f_{lmn}| = \sqrt{\frac{\pi R^2 h}{2 \alpha}}$$

Si V a une géométrie annulaire.

Hauteur h , rayon extérieur R_1 , rayon intérieur R_2 .

Les fonctions propres sont :

$$f_{lmn} = \left[Y'_n\left(\frac{a_{nm}}{R_1}\right) J_n\left(\frac{a_{nm} r}{R_1}\right) - J'_n\left(\frac{a_{nm}}{R_1}\right) Y_n\left(\frac{a_{nm} r}{R_1}\right) \right] \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \cos \frac{\pi l z}{h}$$



La valeur propre correspondante est :

$$\lambda^2 = \left(\frac{a_{nm}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{h}\right)^2$$

avec :

$n, l =$ entiers positifs ou nuls;

$m =$ entier positif;

$a_{nm} = m^{\text{ième}}$ solution de l'équation : ($a_{nm} \neq 0$)

$$J'_n(x) Y'_n\left(\frac{R_2}{R_1} x\right) = J'_n\left(\frac{R_2}{R_1} x\right) Y'_n(x)$$

$J_n(x)$ et $Y_n(x) =$ les deux fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n .

NORME DE f_{lmn} .

Si $a_{nm} \neq 0$:

$$|f_{lmn}|^2 = \frac{h R_1^2}{\pi \alpha \beta a_{nm}^2} \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{a_{nm}^2}\right) - \left[1 - \frac{n^2}{a_{nm}^2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right] \left(\frac{J'_n(a_{nm})}{J'_n(a_{nm} R_2/R_1)}\right)^2 \right\}$$

Si $a_{nm} = 0$ ($f_{lmn} = \cos \pi l z / h$) cas d'une onde plane :

$$|f_{lmn}|^2 = \frac{\pi (R_1^2 - R_2^2) h}{2 \alpha}$$

Annexe 5 COMPLÉMENT CONCERNANT LE DÉROULEMENT DES ESSAIS

Pour le dépouillement des essais, nous avons utilisé deux appareils. L'un est un analyseur en temps réel Spectral Dynamics, type SD 301 B, complété par un moyennneur, l'autre un analyseur à filtre suiveur Spectral Dynamics, type SD 101 B.

Avec le premier appareil, on a calculé les spectres des fluctuations de pression dans la gamme de 0 à 500 Hz. Ces spectres représentent le résultat d'un filtrage linéaire du signal à travers 500 filtres jointifs de largeur 1,5 Hz.

L'analyseur en temps réel permet de travailler de deux façons. On peut suivre l'évolution d'un signal en observant sur un oscilloscope la déformation de son spectre, ou bien calculer des valeurs moyennes en sommant les résultats de 2ⁿ analyses.

Les deux méthodes ont été utilisées successivement pour l'analyse des fluctuations de pression. Lors d'une variation lente du débit dans le circuit (la variation de 3 200 tr/mn à 1 500 tr/mn du régime de la soufflante s'effectue en 20 mn environ), la visualisation en continu du spectre permet de localiser les zones critiques où apparaissent des signaux quasi-sinusoidaux d'amplitude élevée. Dans ces zones, une nouvelle analyse est effectuée de façon à obtenir des valeurs

moyennes, calculées à partir de 32 analyses élémentaires successives. Ce sont ces valeurs moyennes qui sont ensuite reportées sur des graphiques pour la comparaison des calculs et de l'expérience.

REMARQUES: La variation du débit dans le circuit est suffisamment lente pour que l'état vibratoire du circuit ne varie pratiquement pas pendant le temps de calcul des valeurs moyennes (32 s).

L'utilisation d'un filtre suiveur, enfin, donne des résultats identiques. Le filtre employé a une largeur de bande de 2 Hz. Il permet ainsi de suivre de façon continue l'évolution d'une composante du signal à une fréquence donnée, l'oscillateur commandant la translation du filtre étant alors calé sur cette fréquence. De cette façon, on a tracé, en fonction du régime de la soufflante, l'évolution de l'amplitude des composantes à 96, 112, 116 et 146 Hz des fluctuations de pression.

Naturellement, cette méthode très simple n'a pu valablement être employée qu'après s'être assuré par la visualisation de spectres que l'on avait affaire à des fréquences très stables.

