

# Définition de la géométrie des structures ventilées à la base

**Robert-Jean Balquet**

Chef de la Division "Navires Spéciaux"

**Robert Baubeau**

Ingénieur de la Division "Navires Spéciaux"

Bassin d'Essais des Carènes

## Généralités

L'objet de cette communication est de présenter une méthode de calcul permettant de déterminer la géométrie d'ailes tridimensionnelles ventilées à la base devant opérer à proximité de la surface libre.

Dans l'esprit d'un architecte naval, la forme globale de l'aile est imposée (loi de corde, loi d'épaisseur, position du bord d'attaque) ainsi que la répartition de la portance. De façon à ce que l'écoulement créé soit le plus sain possible (afin d'éviter les risques de cavitation) non seulement nous imposons la condition d'entrée sans choc mais également une répartition de la charge de l'aile aussi constante possible.

A proximité de l'aile, l'écoulement considéré comme bidimensionnel par tranche, est calculé par la méthode non linéaire due à Larrock et Street [1] alors qu'à l'infini l'écoulement est assimilé à celui créé par la ligne portante représentant l'aile.

Un développement asymptotique dans lequel l'inverse de l'allongement est le petit paramètre permet de raccorder au deuxième ordre les solutions des problèmes bi et tridimensionnel [3].

## A) Problème bidimensionnel

*Modélisation de Larrock et Street et Rappel de la théorie* [1] (voir fig. 1)

Larrock et Street considèrent un profil ventilé dans un écoulement bidimensionnel limité par la seule surface libre. La gravité est négligée.

Les lignes de courant intrados et extrados se prolongent à l'aval du profil, déterminant une cavité le long de laquelle le module de la vitesse  $U_{CAV} = U_{\infty} \sqrt{1+K}$

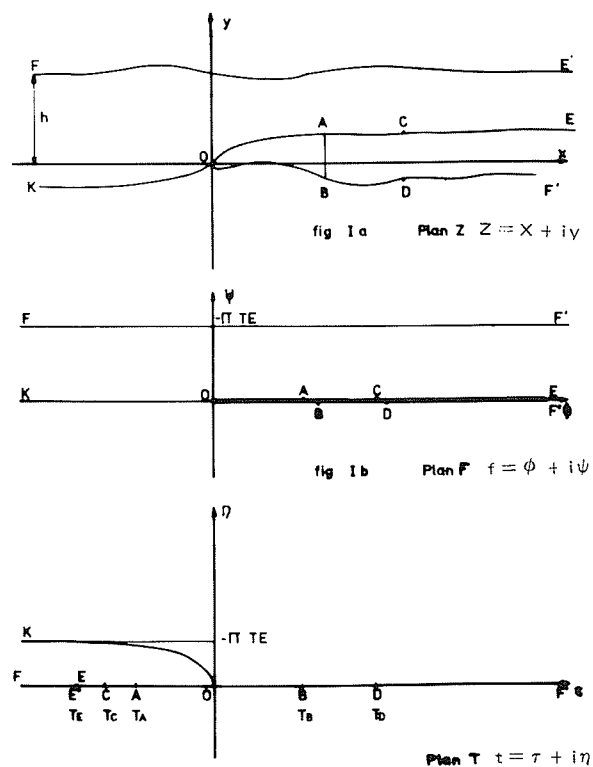


Figure 1

( $K$  nombre de ventilation) est constant. Aux points de fermeture en  $C$  et  $D$  de la cavité la ligne de courant s'enroule sur elle-même.

Ces 2 lignes de courant se prolongent ensuite jusqu'à l'infini déterminant un sillage le long duquel la vitesse est constante et égale à  $U_{\infty}$ .

Sur la surface libre le module de la vitesse est constant et égal à  $U_{\infty}$  (ce qui correspond à la condition du nombre de Froude infini).

Ce schéma dans le plan physique  $Z$  (voir fig. 1a) peut être représenté dans le plan du potentiel  $F$  (voir figure 1b), la transformation entre  $F$  et  $Z$  étant implicite.

La figure 1c représente ce même schéma dans le plan  $T$  défini par la transformation suivante

$$f(\tau) = t + TE \log \frac{TE - t}{TE} \quad (TE \text{ est une constante})$$

En supposant  $Q(\tau)$  connu sur le segment  $AB$  représentant le profil, la répartition  $Q(\tau)$  est connue de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur l'axe du plan  $T$ . Cela correspond à un problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes.

De même si  $\beta(\tau)$  est connu sur  $AB$  nous aboutissons à la résolution du problème de Dirichlet avec conditions aux limites mixtes.

En réalité que ce soit en problème direct ou inverse,  $Q(\tau)$  ou  $\beta(\tau)$  ne sont pas connus et devront être obtenus par itération de façon que la solution obtenue dans le plan physique restitue  $Q(x)$  ou  $\beta(x)$ .

**Répartition du module de la vitesse  $Q(\tau)$  sur l'axe  $\tau$**

Dans cette étude nous cherchons à déterminer un profil (problème inverse) pour lequel la répartition de charge (c'est-à-dire du module de la vitesse, la gravité étant négligée) soit la plus constante possible et égale à  $C_{pi}$  sur l'intrados et à  $-C_{pe}$  sur l'extrados, ceci en vue de minimiser les risques de cavitation.

$Q(\tau)$  est égal à  $U_\infty$  sur les segments  $-\infty, TC$  et  $TD, +\infty$  et à  $U_{CAV}$  sur les segments  $TC - TA$  et  $TB - TD$ .

Nous définissons 3 répartitions élémentaires  $q_1, q_2, q_3(\tau)$  de vitesses telles que

$$Q(\tau) = q_1(\tau) \times q_2(\tau) \times q_3(\tau)$$

$$q_1 = U_\infty \quad \text{si} \quad -\infty < \tau < +\infty$$

$$q_2 = \frac{U_{CAV}}{U_\infty} = \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} \quad \text{si} \quad TC < \tau < TD$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad \tau < TC \text{ ou } \tau > TD$$

$$q_3 = |q(\tau)| \quad \text{si} \quad TA < \tau < TB$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad \tau < TA \text{ ou } \tau > TB$$

$q_3$  ainsi défini est tel que  $q_3(T_A) = q_3(T_B) = 1$   
 $q_3$  s'annule pour  $\tau = 0$  (point d'arrêt). Par commodité nous étudierons  $q(\tau) = \text{signe}(\tau) \times q_3(\tau)$  fonction continue ayant des dérivées premières continues entre  $-\infty$  et  $+\infty$ .

**Etude de  $q(\tau)$  entre  $TA$  et  $TB$**

– Entre  $T2$  et  $T1$   $q = q_{ex} < -1$

Si  $-\varphi_a$  est la charge locale de l'extrados (correspondant à une dépression) :

$$q_{ex} = -\sqrt{\frac{1+C_{pe}}{1+K}} \quad C_{pe} > 0$$

– Entre  $T3$  et  $T4$   $1 > q_{in} = q > 0$

Nous aurons de même

$$q_{in} = \sqrt{\frac{1-C_{pi}}{1+K}} \quad C_{pi} > 0$$

– Entre  $TA$  et  $T2$  et  $T4$  et  $TB$  le raccordement se fait par des lois en sinus qui assurent un raccordement à pente nulle (1).

$$q(\tau) = \frac{q_{ex} - 1}{2} +$$

$$+ \frac{q_{ex} + 1}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \times \frac{2\tau - T2 - TA}{T2 - TA} \right] \quad TA < \tau < T2$$

$$q(\tau) = \frac{q_{in} + 1}{2} +$$

$$+ \frac{q_{in} - 1}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \times \frac{2\tau - T4 - TB}{T4 - TB} \right] \quad T4 < \tau < TB$$

Entre  $T1$  et  $T3$  le raccordement se fait par la loi en sinus suivante :

$$q(\tau) = \frac{q_{in} + q_{ex}}{2} +$$

$$+ \frac{q_{in} - q_{ex}}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \times (\alpha\tau^2 + \beta\tau + \gamma) \right]$$

avec

$$\begin{cases} \alpha T1^2 + \beta T1 + \gamma = -1 \\ \alpha T3^2 + \beta T3 + \gamma = 1 \\ q(0) = 0 \\ q'(0) = d_1 q_0 \\ q''(0) = d_2 q_0 \end{cases}$$

Ces 5 relations déterminent  $T1, T3, \alpha, \beta, \gamma$  et assurent un raccordement à dérivée première nulle.

Toutes ces propriétés se conservent évidemment dans le plan physique. Il nous est possible de nous imposer directement la répartition de  $q(\tau)$  ou plutôt de  $\log |q(\tau)|$  sur l'axe  $\tau$  du plan  $T$ , ce qui nous amène à résoudre un simple problème de Dirichlet aux conditions aux limites homogènes.

**Résolution du problème**

Dans le demi-plan  $\eta \geq 0$  complété analytiquement la solution du problème consiste à définir la fonction complexe  $\omega(t) = \log Q(t) - i\beta(t)$  fonction dont la partie réelle est connue sur l'axe réel.

(1) Les raccordements à pente nulle aux points  $A$  et  $B$  entraînent la continuité du rayon de courbure au point de détachement des lignes de jet (condition de Villot).

La solution est donnée par

$$\begin{aligned} \log Q(t) - i\beta(t) &= \\ &= \log U_\infty - i\beta_\infty - \frac{i}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\log |q(\tau)|}{t - \tau} d\tau \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} \int_{TC}^{TD} \frac{d\tau}{t - \tau} \end{aligned}$$

Le profil sera alors construit grâce aux relations

$$\begin{cases} dx = \frac{dx}{df} \frac{df}{dt} dt = \frac{\cos(\beta)}{q(\tau)} \frac{df}{dt} dt \\ dy = \frac{dy}{df} \frac{df}{dt} dt = \frac{\sin(\beta)}{q(\tau)} \frac{df}{dt} dt \end{cases}$$

1) Calcul de  $\beta$  sur le profil et de ses dérivées à l'origine

L'intégrale déterminant  $\beta(t)$  présente une singularité logarithmique pour  $\tau = 0$  et une singularité pour  $\tau = t$ . Elle sera régularisée en la mettant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \beta_\infty + \frac{1}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\log \left| \frac{q(\tau)}{\tau} \right| - \log \left| \frac{q(t)}{t} \right|}{t - \tau} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{q(t)}{t} \right| \log \left| \frac{TB - t}{TA - t} \right| + \frac{1}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\log |\tau|}{t - \tau} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+K}}{U_\infty} \log \left| \frac{t - TD}{t - TC} \right| \end{aligned} \quad (1)$$

De même

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\frac{d}{d\tau} \left[ \log \left| \frac{q(\tau)}{\tau} \right| \right] - \frac{d}{dt} \left[ \log \left| \frac{q(t)}{t} \right| \right]}{t - \tau} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\pi t} \log \left| \frac{TB}{TA} \right| - \frac{q'(t)}{\pi q(t)} \log \left| \frac{TB - t}{TA - t} \right| \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+k}}{U_\infty} \left[ \frac{1}{t - TD} - \frac{1}{t - TC} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

et

$$\begin{aligned} \beta''(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\frac{d^2}{d\tau^2} \left[ \log \left| \frac{q(\tau)}{\tau} \right| \right] - \frac{d^2}{dt^2} \left[ \log \left| \frac{q(t)}{t} \right| \right]}{t - \tau} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{\pi t} \left[ \frac{1}{TB} - \frac{1}{TA} \right] + \frac{1}{\pi t^2} \left[ \log \left| \frac{TB - t}{TA - t} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \log \left| \frac{TB}{TA} \right| \right] - \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dt^2} \left[ \log \left| \frac{q(t)}{t} \right| \right] \log \left| \frac{TB - t}{TA - t} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+K}}{U_\infty} \left[ \frac{1}{(t - TD)^2} - \frac{1}{(t - TC)^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

2) Calcul de  $\beta$  à l'infini

a) Calcul de  $\beta$  pour  $t = TE$

L'intégrale définissant au point  $t = TE$  ne présente qu'une singularité logarithmique à l'origine, nous utiliserons la relation (1).

b) Calcul de  $\beta$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$

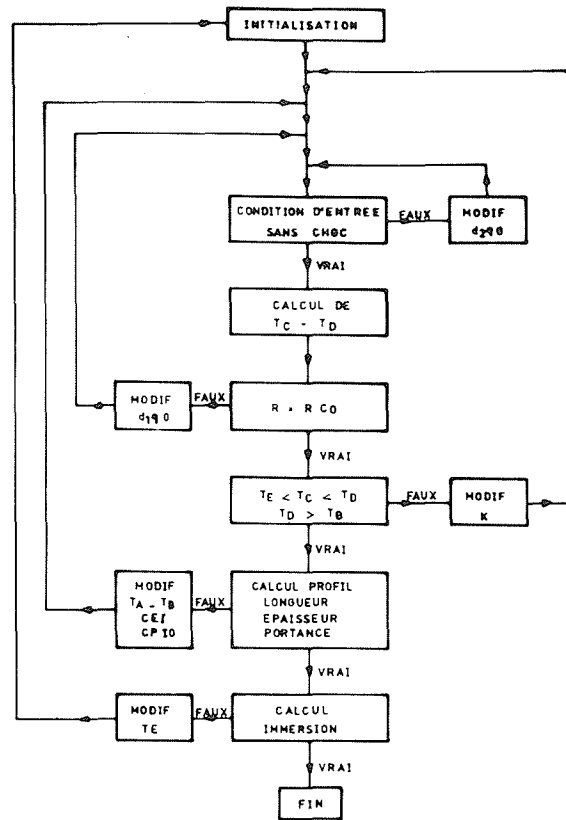
Lorsque  $t \rightarrow -\infty$  il est évident que  $\beta \rightarrow \beta_\infty$ .

Nous allons calculer  $\beta_s$ , défini par

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) t \\ \beta_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{TA}^{TB} \log |q(\tau)| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} (TD - TC) \end{aligned} \quad (4)$$

Etude des différentes itérations

Nous suivons ici le schéma indiqué par l'organigramme (voir figure 2)



ORGANIGRAMME RELATIF AU CALCUL D'UN PROFIL

Figure 2

a) Initialisation

$TA$  et  $TB$  qui servent à régler la longueur de l'extrados et de l'intrados sont définis comme suit :

$$f(TA) = -L \times q_{ex} \times U_{cav}$$

avec 
$$f(t) = t + TE \log \frac{t - TE}{TE}$$

$$f(TB) = L \times q_{in} \times U_{cav}$$

Cela revient à écrire que l'abscisse curviligne est égale à  $x$  et que la répartition de vitesse est constante entre 0 et  $TA$  et 0 et  $TB$ .  $TE$  sert à régler l'immersion du profil ; en effet le débit s'écoulant à l'infini amont entre la surface libre et la ligne de courant arrivant au point d'arrêt ou entre la surface libre et l'extrados du sillage est  $\Delta\Psi = -\pi TE - \frac{\pi TE}{U_\infty}$  correspond donc à la section à travers laquelle s'effectue ce débit.

Nous posons  $TE = -\frac{U_\infty H}{\pi}$

La valeur initiale du rapport  $CEI$  entre la charge d'extrados  $Cp_e = (1+K)q_{ex}^2 - 1$  et la charge d'intrados  $Cp_i = -(1+K)q_{in}^2 + 1$  est choisie arbitrairement (généralement  $0,5 < CEI < 0,9$ ).

$Cp_i$  est alors défini par : ( $T21 = T41 = 0,8(2)$ )

$$Cp_i = \frac{2 \times P}{1 + T41 + CEI(1 + T21)}$$

La valeur de  $d1q_0$  est reliée au rayon de courbure. En effet nous savons que pour la parabole osculatrice au profil nous avons  $1/RC = dq/ds$

Partant de cette approximation

$$\frac{1}{RC} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{df} \frac{df}{ds} = -q_0'^2 TE(1+K)$$

$$q_0' = \sqrt{\frac{-1}{(1+K)RC \times TE}}$$

b) Calcul de  $TC$  et  $TD$  - Régularité de la vitesse à l'infini

- Si  $t \rightarrow TE$  l'argument  $\beta$  doit tendre vers  $\beta_\infty$  ; d'après la relation (1)  $\beta$  peut se mettre sous la forme :

$$\beta(TE) = \beta_\infty + BE + \frac{1}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} \log \left| \frac{TE - TD}{TE - TC} \right| \quad (5)$$

Nous aurons donc

$$BE = -\frac{1}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} \log \left| \frac{TE - TD}{TE - TC} \right|$$

- Si  $t \rightarrow \infty$  l'argument  $\beta$  s'écrit d'après la relation (4) sous la forme :

$$\beta = \beta_\infty + \frac{\beta_1}{t}$$

ou

$$\beta = \beta_\infty + \frac{1}{\tau} \left( db_{in} + \frac{1}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+K}}{U_\infty} (TC - TD) \right)$$

Comme à l'infini  $x \sim \tau$  (voir en annexe le détail des développements limités)

$$\beta \sim \beta_\infty + \frac{\beta_1}{x}$$

et

$$\frac{dy}{dx} \sim tg \beta_\infty + \frac{\beta_1}{x}$$

$y$  est donc divergent comme  $\log(x)$  si  $\beta_1$  est différent de zéro. Nous avons donc

$$db_{in} = -\frac{1}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}} (TD - TC)$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} TD - TC = -\frac{\pi db_{in}}{\log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}}} = F3 \quad (6) \\ \log \left| \frac{TE - TD}{TE - TC} \right| = -\frac{\pi BE}{\log \sqrt{\frac{1+K}{U_\infty}}} \quad (7) \end{array} \right.$$

$TC$  et  $TD$  sont ainsi déterminés.

c) Calcul de  $d_2q_0$  - condition d'entrée sans choc

La condition d'entrée sans choc signifie que le point d'arrêt correspond au point de rayon de courbure minimale soit

$$RC = \frac{ds}{d\beta} = \frac{ds}{df} \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\beta} = \frac{f'}{q\beta'}$$

soit

$$\frac{\beta_0''}{\beta_0'} = \frac{q_0''}{2q_0'} - \frac{1}{TE} = \text{fonct}(q_0'')$$

Cette itération se trouve être parfaitement linéaire et son coefficient angulaire est même proportionnel à  $q_0'$  et à  $TE$ .

d) Calcul de  $d_1q_0$  calcul du rayon de courbure

Nous imposons d'une façon parfaitement arbitraire que le rayon de courbure soit égal à celui de la parabole de même élanement.

L'itération se fera en modifiant  $q_0$  de façon à ce que  $q_0'^2 RC = C^{te}$ .

A ce stade du calcul si le profil n'a pas de réalité physique, c'est-à-dire si  $TC$  extérieur à  $TE - TA$  ou si  $TD < TB$  nous sommes conduits à diminuer la valeur de  $K$  et à recommencer tout le calcul.

En effet dans ce cas on trouve une longueur de poche

(2) Nous réglons les valeurs de  $T3$  et  $T4$  de façon à ce que (d'une manière absolument arbitraire)  $x(T4) = T41$   $x(TB) = 0,8$   $x(TB)$  et  $x(T2) = T21$   $x(TA) = 0,8$   $x(TA)$  c'est-à-dire  $f(T4) = 0,8 f(TB)$  et  $f(T2) = 0,8 f(TA)$ .

négative et si  $K \rightarrow 0$ , la longueur de poche tend vers  $\infty$ .

e) *Détermination de la longueur, de l'épaisseur et de la portance du profil*

A ce moment du calcul nous avons tous les éléments pour construire un profil, c'est-à-dire de déterminer dans un premier temps la répartition  $\beta(t)$  et dans un deuxième temps  $x(t)$  et  $y(t)$  et la portance globale.

Néanmoins le profil ainsi trouvé ne nous satisfait pas puisqu'il n'a aucune raison d'avoir la longueur (intrados et extrados), l'épaisseur et la portance choisies.

Si  $L_E$  et  $L_I$  sont les longueurs d'extrados effectivement trouvées (en fait très voisines de  $L$ ) les valeurs de  $TA$  et  $TB$  sont modifiées comme suit :

$$f(TA) = -q_{ex} \frac{L}{LE} \sqrt{1+K}$$

$$f(TB) = q_{in} \frac{L}{LI} \sqrt{1+K}$$

L'épaisseur est réglée en itérant linéairement par rapport à  $CEI$  tout en modifiant aussi peu que possible la portance.

Si  $CEI_A$  et  $CEI_N$  sont l'ancien et le nouveau rapport on recalculera le coefficient de portance d'intrados par la relation

$$Cp_i = Cp_i \times \frac{[1 + T41 + CEI_A (1 + T21)]}{[1 + T41 + CEI_N (1 + T21)]}$$

Le coefficient angulaire  $dd_1ep$  de cette itération est pré-réglé à  $-1./$  portance car l'expérience a montré qu'il était sensiblement inversement proportionnel à la portance.

Pour la portance (assez voisine de celle recherchée) on effectuera de même une itération linéaire par rapport à  $Cp_i$  (sans changer le rapport  $CEI$ ).

Le coefficient angulaire  $DQE$  sera calculé selon la relation

$$DQE = \frac{4}{L(1 + T41 + CEI(1 + T21))}$$

Pour ces deux relations lorsque nous nous trouvons très près de la solution recherchée  $dd_1ep$  et  $DQE$  peuvent être calculés directement par les variations associées à 2 itérations successives.

f) *Détermination de l'immersion*

Nous avons déterminé un profil qui satisfait à nos conditions mais pour lequel la valeur de l'immersion (distance entre le point d'arrêt et la surface libre non déformée) n'est pas forcément correcte.

Nous allons calculer la déformation  $y_1$  de la ligne de courant allant de l'infini amont au point d'arrêt ; en tenant compte des développements limites de  $y(\tau)$  et de  $x(\tau)$  si  $\tau \rightarrow -\infty$  (voir annexe). Comme  $y_0 = \pi TE/U_\infty$  est la distance entre cette ligne de courant et la surface libre à l'infini amont,  $-y_0 + y_1$  est l'immersion  $h$  du profil.

$y_1$  étant presque indépendant de  $h$  ( $h_0$  étant voisin de

$h$ ) nous modifierons  $T_E$  par la relation

$$TE = -\frac{U_\infty}{\pi} (-y_1 + h_0)$$

Nous recommençons alors l'ensemble des calculs mais la variation des paramètres étant très petite à ce niveau là, l'itération est très rapide.

## B) Etude tridimensionnelle

La présente étude traite de l'écoulement autour d'une aile de grand allongement ventilée à la base évoluant à proximité de la surface libre.

### I Construction de la solution

Définition du "Far field" (voir figure 3)

L'allongement  $1/\epsilon$  est grand et l'envergure fixée (la corde et l'immersion tendant donc vers zéro comme  $\epsilon$ ). L'écoulement à l'infini de l'aile tend à être celui créé par une simple ligne de tourbillons située sur la surface libre [2-4].

Le potentiel limité sur 1er ordre est donné par

$$\phi = x + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{y \gamma(z') dz'}{y^2 + (z - z')^2} \left[ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \right] + 0 (\epsilon^2)$$

Définition du "Near field"

Considérons cette même aile, la longueur de la corde étant fixée, l'envergure tend vers l'infini comme  $1/\epsilon$ .

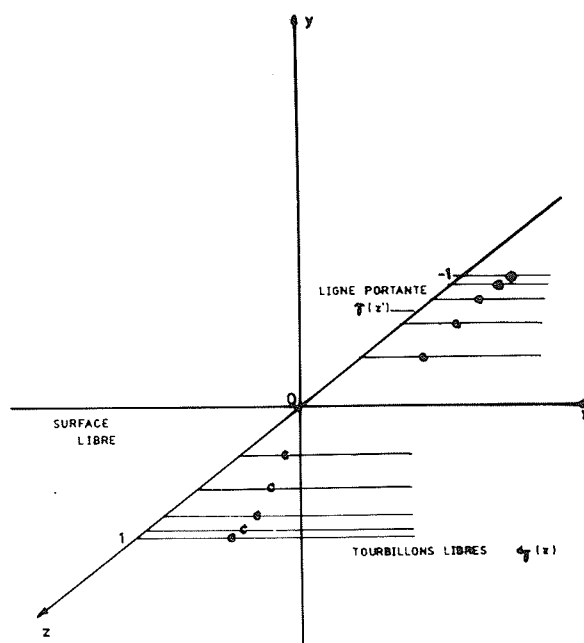


Figure 3 - Schématisation d'une aile ventilée de grand allongement évoluant à proximité de la surface libre par le concept de la ligne portante.

Dans la zone du "Near field" l'écoulement créé sera calculé à partir des coordonnées dites "internes"  $X, Y, Z$  déduites des précédentes par les relations

$$\begin{cases} X = \frac{x}{\epsilon} \\ Y = \frac{y}{\epsilon} \\ Z = z \end{cases}$$

Dans cette zone  $X Y Z$  sont d'un ordre inférieur ou égal à 1.

Le potentiel  $\Phi(X, Y, Z) \equiv \frac{1}{\epsilon} \phi(x, y, z)$  doit vérifier l'équation de Laplace.

$$\begin{aligned} \Phi_{x^2} + \Phi_{y^2} + \Phi_{z^2} &= 0 \\ \text{soit } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Au 1<sup>er</sup> ordre  $\Phi$  sera donc la solution de l'équation de Laplace en bidimensionnel, solution étudiée au paragraphe A.

*Raccordement asymptotique [3]*

La solution du problème extérieur représente l'écoulement dans la région de l'infini amont tandis que celle du problème intérieur représente l'écoulement à proximité de l'aile. Dans chacune de ces deux régions une solution sera validée tandis que l'autre faillira. Dans les coordonnées extérieures  $x, y, z$ , la solution extérieure n'est pas valable si  $x$ , ou  $y$  sont de l'ordre de  $\epsilon$ , tandis que dans les coordonnées intérieures ( $X, Y, Z$ ) la solution intérieure faillit si  $X$  et  $Y$  sont de l'ordre de  $1/\epsilon$  (ou si  $x$  et  $y$  sont de l'ordre de 1 en ramenant  $X$  et  $Y$  dans les coordonnées extérieures).

Le problème sera donc de trouver un potentiel uniformément valable dont les limites dans les coordonnées extérieures et intérieures dans les domaines extérieur et intérieur seront les mêmes que celles données par les solutions des problèmes extérieur et intérieur.

Il existe donc un domaine frontière où les solutions doivent se raccorder et sont donc toutes deux valables vu leur ordre d'approximation.

Dans cette zone les 2 solutions doivent être équivalentes, c'est-à-dire que la limite de  $\Phi_E$  si  $x \rightarrow 0$ , doit être égale à la limite de  $\Phi_I$  si  $x \rightarrow -\infty$ .

*Limite de  $\Phi_E$  si  $x \rightarrow 0$*

Nous trouvons dans les coordonnées intérieures ( $\gamma(z) \equiv \epsilon \Gamma(z)$ )

$$\Phi_E \sim x - \frac{\Gamma(z)}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} - \frac{y\epsilon}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Gamma(z')}{\partial z'} \frac{\partial z'}{z - z'} + 0(\epsilon)$$

*Limite de  $\Phi_I$  si  $x \rightarrow -\infty$*

En annexe nous avons trouvé

$$\Phi_I \sim U_\infty \cos \beta_\infty \left( X + Y \operatorname{tg} \beta_\infty + \beta_1 \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y}{X} \right) + 0 \quad (1)$$

avec

$$\beta_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) t$$

L'égalité de ces deux limites qui entraîne l'existence d'un domaine où les 2 solutions sont également valides impose donc

$$\begin{cases} U_\infty \cos \beta_\infty = 1 \\ \operatorname{tg} \beta_\infty = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Gamma(Z')}{\partial Z'} \frac{dZ'}{Z - Z'} = \alpha(Z) \\ \beta_1 = -\frac{\Gamma(Z)}{\pi} \end{cases}$$

Soit  $\Phi_I$  la limite commune de  $\Phi_E$  et de  $\Phi_I$

$$\Phi_I = X + Y \operatorname{tg} \beta_\infty + \beta_1 \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y}{X}$$

Donc  $\Phi = \Phi_E + \Phi_I - \Phi_I$

Le potentiel  $\Phi$  ainsi construit est donc uniformément valable et répond donc aux conditions imposées.

*Etude de  $\Phi_E$*

En problème inverse la répartition  $\Gamma(z) (-1 < z < 1, \Gamma(\pm 1) = \Gamma(-1) = 0)$  est connue et nous poserons

$$\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \sin(2n-1)\theta$$

avec  $Z = -\cos \theta$

$$\Gamma(z) \text{ est symétrique } \Gamma(z) = \Gamma(-z)$$

De même

$$\begin{aligned} \alpha(Z) &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Gamma}{\partial Z'} \frac{dZ'}{Z - Z'} \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1} \frac{\sin(2n-1)\theta_1}{\sin(\theta_1)} \end{aligned}$$

avec  $Z = -\cos \theta_1$

Dans le calcul de l'immersion nous aurons à calculer

$$Y_E(XO, O, Z) = \int_{-\infty}^{XO} \frac{\partial \Phi_E}{\partial Y} dX$$

Soit

$$Y_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(Z')}{Z - Z'} [XO + \sqrt{XO^2 + (Z - Z')^2}] dz'$$

Avec  $XO < 0 \quad \Gamma(1) = \Gamma(-1) = 0$

**Etude de  $\Phi_I$**

C'est le calcul exposé au § A avec les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\infty = \text{tg}^{-1} \alpha(z) \\ U_\infty = \frac{1}{\cos \beta_\infty} \\ \beta_1 = -\frac{\Gamma(Z)}{\pi} \quad \text{avec } \beta_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) t \end{array} \right.$$

**Etude de  $\Phi$  – calcul de l'immersion**

Pour le problème intérieur (bidimensionnel) nous avons

$$\psi_I = U_\infty \left[ h - \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I \right] = -\pi TE$$

ou

$$h = \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I - \frac{\pi TE}{U_\infty}$$

Donc pour le problème complet nous aurons

$$h = \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I + \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_E}{\partial X_E} dX_E - \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I - \frac{\pi TE}{q_\infty}$$

Considérons  $XNF$  tel que

$$\int_0^{XNF} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dl \sim \int_0^{XNF} \frac{\partial Y_E}{\partial X} dX_E$$

Il suffit de prendre  $XNF$  très petit puisque  $\Phi_I \sim \Phi_E$  si  $x \rightarrow 0$ . Soit

$$h = \int_0^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I - Y_E(XNF) - \int_{XNF}^{-\infty} \frac{\partial Y_I}{\partial X_I} dX_I - \frac{\pi TE}{q_\infty}$$

Nous avons aussi  $\frac{\partial Y_I}{\partial X_I} \sim \frac{\partial Y_I}{\partial X_I}$  si  $x \rightarrow -\infty$

Compte tenu du développement limité  $\frac{\partial Y_I}{\partial X}$  étudié en Annexe, il vient

$$I_R = \int_{-\infty}^{XS} \left[ \frac{\partial Y_I}{\partial X} - \frac{\partial \Phi_R}{\partial Y} \right] dX$$

Lorsque numériquement nous calculerons  $X_S(t)$  et  $Y_I(t)$  pour des valeurs de  $t$  tendant vers  $-\infty$  nous aurons

$$h = Y_I(x_S) - I_R - Y_E(XNF) - \text{tg } \beta_\infty (X_S - XNF) - \beta_1 \log \left| \frac{X_S}{XNF} \right| - \frac{\pi TE}{U_\infty}$$

Soit

$$\psi = -\frac{\pi TE}{U_\infty} = h - Y_I(x_S) + I_R + Y_E(XNF) + \text{tg } \beta_\infty (X_S - XNF) + \beta_1 \log \left| \frac{X_S}{XNF} \right|$$

Nous calculerons cette expression  $\psi$  pour des valeurs de  $-t$  croissantes jusqu'à obtention de convergence.

Ainsi nous obtiendrons une nouvelle valeur de  $TE = -\psi U_\infty / \pi$  à partir de laquelle nous aurons à recommencer le calcul du problème intérieur (bidimensionnel) jusqu'à assurer la convergence (stabilité de  $TE$ ). Ceci est très rapide car le problème bidimensionnel sera très peu affecté, la modification de  $TE$  étant très faible en prenant au départ  $TE = -h/\pi$ .

**Cas limite de l'envergure infinie – cas bidimensionnel**

A la lumière de l'étude tridimensionnelle, nous pouvons traiter le bidimensionnel de la manière suivante.

Nous devons alors adjoindre les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\infty = 0 \\ U_\infty = 1 \\ \beta_1 = -\frac{\Gamma}{\pi} \end{array} \right.$$

**Remarque**

Nous avons dans la partie A de ce rapport indiqué que le terme  $\beta_1$  ( $\beta_1 = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty)\tau$ ) devait être

nul, ceci pour être homogène avec l'étude tridimensionnelle qui suivrait. En fait cette condition n'est pas utilisée en pratique lors de la résolution du seul problème bidimensionnel car elle entraîne une très grande dissymétrie des longueurs de poche extrados et intrados. Les auteurs [1 – 2] imposent en général  $\Phi_C = \Phi_D$  ce qui est très proche du résultat trouvé ici ( $\beta_1 = -\Gamma/\pi$  entraîne  $\Phi_C \sim \Phi_D$ ).

L'étude purement bidimensionnelle avec  $\Phi_C = \Phi_D$  entraîne que les auteurs ne s'intéressent qu'à l'écoulement voisin de la section et que l'immersion réglée en posant  $TE = -h/\pi$  ne puisse pas être déterminée exactement du fait de la divergence logarithmique des lignes de courant à l'infini.

**Exemple d'application**

Une demi-aile ventilée schématisée figure 4 est définie à titre d'exemple (voir figure 5). Elle est représentée par 8 de ses sections. Sa forme est définie par la loi de corde et par la position du bord d'attaque, soit :

$$L = 1,93488 - 0,456522 z \quad (\text{les longueurs étant exprimées en mètres})$$

$$x = -0,30655 z$$

L'immersion de la section médiane est de 1,25 et l'aile présente un angle de dièdre de  $2^\circ 40'$ . L'immersion d'une section courante est

$$H = 1,25 + \text{tg}(2^\circ 40') z$$

Le nombre de ventilation est de 0.08.

La répartition elliptique de  $\Gamma(z)$  ( $\Gamma = PL/2$ ) est donnée par

$$\Gamma(z) = 0,151261 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{2,6308}\right)^2}$$

Cette aile pourrait représenter un plan porteur chargé à 12 t au m<sup>2</sup>, d'un hydroptère de 170 t destiné à évoluer à 70 nœuds.

**Conclusion**

Ne disposant pas encore de résultats expérimentaux pour vérifier la valeur de la méthode proposée, nous ne pouvons ici qu'en souligner les faiblesses et les améliorations susceptibles d'y être portées.

Ce sont d'abord les insuffisances de la solution bidimensionnelle (3).

- Fluide parfait.
- Absence de gravité.
- Schéma de sillage très simplifié.

Ce schéma pourrait être amélioré en introduisant une décroissance exponentielle de la vitesse assurant le raccordement entre la vitesse le long de la cavité et la vitesse à l'infini suivant une méthode due à Michel [7]. Cette correction a pour effet d'allonger de façon notable la longueur de la cavité.

De même il serait possible de tenir compte de façon approchée de la gravité mais alors le problème ne serait plus adimensionnel ; toutefois les ailes évoluant à grand nombre de Froude la correction devrait rester faible.

La solution tridimensionnelle de la ligne portante n'apporte qu'une correction au 1er ordre ; cependant les résultats obtenus dans des cas similaires par d'autres auteurs semblent bien représenter la réalité [2-8-9-10]. Enfin si nous remarquons que cette "correction" a pour effet principal de modifier le calage de chaque section nous pouvons en déduire une valeur de  $\Delta P/\Delta\alpha$ , fonction de l'allongement, en bon accord avec les résultats expérimentaux [10-11].

Bien que l'écoulement représenté reste très schématique cette méthode constitue un outil qui, compte tenu de sa rapidité (6 secondes de temps machine par section), est susceptible de remplacer avantageusement la théorie linéaire utilisée couramment.

**Bibliographie**

[1] LARROCK et STREET - Non-linear solution for un fully cavitating hydrofoil beneath a free surface, *Journal of Ship Research* 11, p. 131-140, 1967.  
 [2] FURUYA O. - Three-dimensional theory on supercavitating hydrofoils near a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 71, part 2, p. 339-359 ; vol. 68, part 1, p. 21-40, 1975.

(3) Nous avons utilisé ici la théorie de Larrock et Street, il va de soi que l'on pourrait construire le même programme avec la théorie de WU (immersion infinie) ou des persiennes.

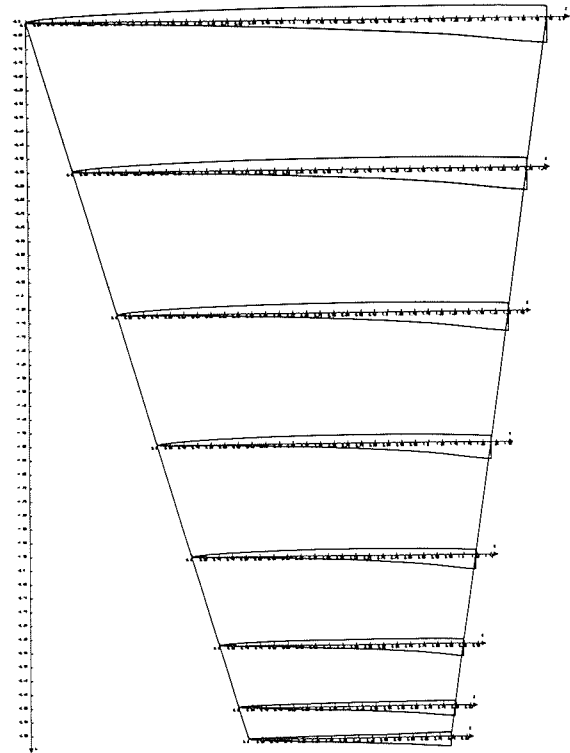
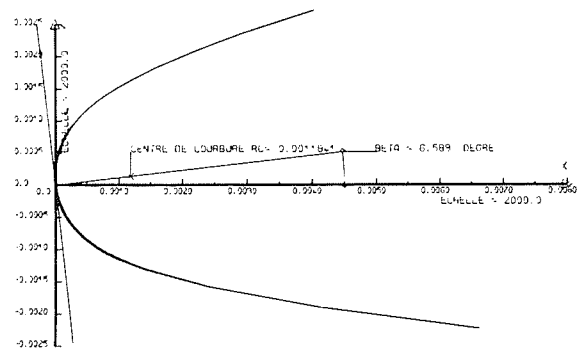
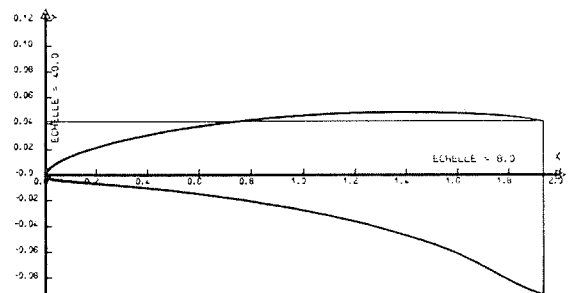


Figure 4 - Vue en plan de l'aile.



DETAIL DU BORD D ATTAQUE



SECTION NO 1

LORDE L = 1.935  
 BORD D ATTAQUE x = -0.0  
 H = 1.250  
 Z = 0.0

Figure 5 - Détail de la section 1 (à l'emplanture).

[3] VAN DYCKE – *Perturbation Methods in fluid Mechanics*. Academic Press, 1964.  
 [4] VAN DYCKE – Lifting-line theory as a singular perturbation problem *Journal of Applied Mathematics Mechanic* 28, p. 107-118, 1964.  
 [5] ABRAMOWITZ et STEGUN – *Handbook of Mathematical function*. Dover Publication.  
 [6] GINSBERG – The Dilogarithm function of real argument. *Algorithm 490 communication of the ACM*, Vol. 18, n° 4, p. 200, Avril 1975.  
 [7] MICHEL – *Ecoulement autour d'un profil à base ventilée dans un canal. Etude de modèles de sillages en théorie linéaire*. 1/10/1974.  
 [8] ACOSTA et FURUYA – A note on three dimensional supercavitating hydrofoils. *Journal of ship research*, vol. 19, n° 3, p. 164-165, 1975.  
 [9] LEEHEY – Supercavitating hydrofoil of finite span. *UTAM symposium*, Leningrad, p. 227-293, 1971.  
 [10] GUYEN N. GOC TRAN N. et ROJDESTVENKII – *Journal de Mécanique*, Vol. 14, n° 5, 1975.  
 [11] BAUBEAU – *Etude de l'effet d'incidence en régime ventilé en bi et tridimensionnel*. A publier.

- $q_{ex}$  : valeurs de  $q(r)$  entre  $T_1$  et  $T_2$   
 $q_{in}$  : valeur de  $q(r)$  entre  $T_3$  et  $T_4$   
 $Cp_e$  : coefficient de portance (changé de signe) de l'extrados  
 $Cp_i$  : coefficient de portance de l'intrados  
 $CEI = CPEO/CPIO$   
 $K$  : nombre de ventilation  
 $U_\infty$  : module de la vitesse à l'infini  
 $U_{cav} = \sqrt{1+K}$  : module de la vitesse le long du sillage  
 $\beta(\tau)$  argument de la vitesse  
 $\beta_0 = \beta(\tau)$  pour  $\tau = 0$   
 $\beta'_0 = \frac{d\beta(\tau)}{d\tau}$  pour  $\tau = 0$   
 $\beta''_0 = \frac{d^2\beta(\tau)}{d\tau^2}$  pour  $\tau = 0$  } valeur de  $\beta$  de sa dérivée 1<sup>ère</sup> et 2<sup>e</sup> à l'origine du plant  $T$   
 $\beta_\infty$  : argument de la vitesse à l'infini  
 $\beta_1 = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) \tau$

**Notations**

**A) Problème bidimensionnel**

$x$  }  $z = x + iy$  : coordonnées d'un point dans le plan  
 $y$  } physique  $Z$  – fig. 1a.

$\Phi$  }  $f = \Phi + i\psi$  : coordonnées d'un point dans le plan  
 $\psi$  } physique  $F$  – fig. 1b.

$\tau$  }  $t = \tau + i\eta$  : coordonnées d'un point dans le plan  
 $\eta$  } physique  $T$  – fig. 1c.

$TA - TB - TC - TD - TE - T1 - T2 - T3 - T4$  : coordonnées  $\tau$  de points dans le plan  $T$  – voir fig. 1c

$$T21 = \frac{f(T2)}{f(TA)} = 0.8$$

$$T41 = \frac{f(T4)}{f(TB)} = 0.8$$

$Q(\tau)$  : module de la vitesse

$\left. \begin{matrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ q_3(\tau) \end{matrix} \right\}$  : composantes de  $Q(\tau) = q_1 \times q_2 \times q_3$

$$q(\tau) = \text{signe}(\tau) \times q_3(\tau)$$

$d_1 q_0 = q'_0 = \frac{dq}{d\tau}$  pour  $\tau = 0$   
 $d_2 q_0 = q''_0 = \frac{d^2q}{d\tau^2}$  pour  $\tau = 0$  } valeur de la dérivée 1<sup>ère</sup> et 2<sup>e</sup> de  $q(\tau)$  à l'origine du plan  $T$

- $RCo$  : rayon de courbure à l'origine  
 $L$  : longueur de la corde  
 $P$  : coefficient de portance  
 $h$  : immersion

**B) Problème tridimensionnel**

$X, Y, Z$  : coordonnées intérieures

$x, y, z$  : coordonnées extérieures

$\Phi$  : potentiels écrits dans les coordonnées intérieures

$\phi$  : potentiels écrits dans les coordonnées extérieures

$\epsilon$  : allongement

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\epsilon} \gamma(z) = \frac{P(Z) \times L(Z)}{Z}$$
 circulation du profil

**Annexe**

Nous étudierons d'abord le développement de  $\Phi(x)$  si  $x \rightarrow -\infty$  puis celui de  $y(x)$  si  $\Phi \rightarrow -\infty$  et  $\psi = 0$  (ligne de courant partant de l'infini amont et arrivant au point d'arrêt).

**Etude à l'infini amont**

Nous avons

$$f = t + TE \log \frac{(TE - t)}{TE} \tag{1}$$

et

$$\frac{df}{dt} = \frac{t}{t - TE} \sim 1 + TE/t + O(1/t^2) \tag{2}$$

avec

$$t = \tau + i\eta \begin{cases} \tau \rightarrow -\infty \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

De plus

$$\log |q| - i\beta = \log U_\infty - i\beta_\infty$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{TA}^{TB} \frac{\log |q(\tau)|}{\tau - t} dr + \frac{i}{\pi} \log \sqrt{\frac{1+k}{U_\infty}} \int_{TC}^{TD} \frac{d\tau}{\tau - t} \tag{3}$$

soit

$$qe^{-i\beta} \sim U_\infty e^{-i\beta_\infty} (1 - i\beta_1/t + O(1/t^2))$$

comme

$$dz = \frac{dz}{df} \frac{df}{dt} dt$$

En intégrant nous avons donc

$$z \sim \frac{e^{i\beta_\infty}}{U_\infty} [t + (TE + i\beta_1) \log t] + O(1) \tag{4}$$

soit en inversant cette relation

$$t \sim U_\infty e^{-i\beta_\infty} z - (TE + i\beta_1) \log z + O(1) \tag{5}$$

Comme nous considérons la vitesse à l'infini comme unitaire la relation (1) s'écrit, compte tenu de (5)

$$\Phi \sim x + \text{tg } \beta_\infty y + \beta_1 \text{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \text{tg } \beta_\infty \log (x^2 + y^2) + O(1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \sim \text{tg } \beta_\infty + \frac{\beta_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

**Etude si  $\Phi \rightarrow -\infty$  avec  $\psi = 0$**

Calcul de  $\eta(\tau)$

Comme

$$f = \Phi + i\psi = t + TE \log \frac{TE - t}{TE}$$

$$\psi = \eta + TE \text{tg}^{-1} \frac{\eta}{\tau - TE} = 0$$

Comme

$$\text{tg}^{-1} \frac{\eta}{\tau - TE} \sim \pi + \frac{\eta}{\tau - TE} \text{ si } \begin{cases} \tau \rightarrow -\infty \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

$$\eta \sim -\pi TE \frac{\tau - TE}{\tau}$$

Soit

$$\eta \sim -\pi TE \left(1 - \frac{TE}{\tau}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} \sim -\pi \frac{TE^2}{\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right)$$

Calcul de  $\tau(x)$

Prenons la partie réelle de la relation (4)

$$x \sim \cos^2 \beta_\infty (\tau + (TE - \text{tg } \beta_\infty) \log \tau)$$

Soit en inversant

$$\tau \sim \frac{x}{\cos^2 \beta_\infty} - (TE - \text{tg } \beta_\infty) \log(x) + O(1) \tag{6}$$

Calcul de  $y(x)$

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \beta$$

La relation (3) montre que l'on peut écrire sous la forme

$$\beta \sim \beta_\infty + \beta_1/\tau + \beta_2/\tau^2 + O(1/\tau^3)$$

Soit

$$\frac{dy}{dx} \sim \text{tg } \beta_\infty + \frac{1}{\cos^2 \beta_\infty} (\beta_1/\tau + \beta_2/\tau^2 + \text{tg } \beta_\infty \beta_1^2/\tau^2) + O(1/\tau^3)$$

Compte tenu de la relation (6) qui s'écrit

$$\frac{1}{\tau \cos^2 \beta_\infty} \sim \frac{1}{x} + (TE - \text{tg } \beta_\infty) \frac{\log |x|}{x^2} - \frac{x A}{x^2} + \frac{x A}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Nous avons donc après intégration

$$y \sim \text{tg } \beta_\infty x + \beta_1 \log x - \beta_1 (TE - \text{tg } \beta_\infty) \frac{\log |x|}{x} - \frac{1}{x} (\cos^2 \beta_\infty (\beta_2 + \text{tg } \beta_\infty \beta_1^2) - x A) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

## Discussion

Président : M. A. CASTERA

M. le Président remercie M. BAUBEAU de son exposé qu'il estime pour sa part très intéressant ; mais il ne voudrait pas paraître partial, s'agissant d'un travail effectué dans l'Etablissement qu'il dirige.

S'agit-il d'un véritable problème inverse ou d'un problème indéterminé ? demande M. MICHEL. La charge est-elle définie en tout point ?

Je ne me donne pas la charge d'extrados ou bien d'intrados, répond M. BAUBEAU ; je m'impose que cette charge d'intrados ou d'extrados soit constante sur 0,8 fois la profondeur de la structure. Cette longueur 0,8 a été choisie d'une façon arbitraire. En général, la dépression d'extrados est inférieure, du moins en valeur absolue, à la surpression d'intrados ; pour l'étude de la cavitation, ceci est intéressant. Par contre, je m'impose la charge globale de l'aile.

Deux profils calculés, l'un suivant la théorie exposée et l'autre suivant une théorie simplement linéaire, présenteraient-ils des différences notables de forme ? interroge M. LAMBERTI.

Il convient de considérer successivement le problème sous l'aspect bidimensionnel et tridimensionnel, répond M. BAUBEAU. En bidimensionnel, la théorie non-linéaire apporte peu de modifications par rapport à la théorie linéaire mais nous pouvons espérer que le comportement local de l'écoulement au bord d'attaque sera meilleur en utilisant la théorie non linéaire qui respecte non seulement le point d'arrêt mais aussi la condi-

tion d'entrée sans choc. Quant à la correction tridimensionnelle apportée par les raccordements des problèmes intérieur et extérieur, elle est surtout sensible au niveau de la modification du calage de chaque section, ce que nous pouvons retrouver en comparant la variation de portance en fonction de l'incidence en bi et tridimensionnel.

Y-a-t-il avantage à définir une aile suivie d'une cavité finie ? Le cas de la cavité infinie ne constitue-t-il pas une meilleure référence ? demande M. MICHEL.

Le programme permet sans difficulté la détermination de profils avec une longueur de poche finie ou infinie, précise M. BAUBEAU. Le calcul serait sans doute plus exact avec une longueur de poche infinie mais représenterait mal les ailes réelles pour lesquelles les poches sont souvent courtes. Pour les poches courtes, il est évident que la représentation de la fermeture de la cavité est mauvaise mais nous pouvons envisager l'introduction d'un sillage à vitesse non constante comme vous l'avez fait en théorie linéaire.

M. DODU signale que les relations entre M. ROWE de l'Institut de Mécanique de Grenoble et M. BAUBEAU sont assez étroites pour que l'on puisse tirer parti, d'ores et déjà, des résultats obtenus par le premier.

M. le Président se réjouit de la bonne collaboration existant entre les deux Etablissements et lève la séance en remerciant : toutes les personnes qui ont contribué à l'animer.

## Abstract

### Definition of the geometry of ventilated structures

In the mind of a naval architect, the depth of submergence, the planform of the wing are imposed, as is the spanwise loading distribution. In order to create the most suitable flow, not only is the free-shock entrance condition imposed, but also a distribution of the wing load that is as constant as possible.

Van Dycke's method of singular perturbations is used to link the Larrock and Street solution of the two-dimensional theory with the lift line.

#### A) The two-dimensional problem

In order to simplify the Larrock and Street theory, distribution of velocity on the profile in the transformed plane  $T$  is necessary ( $f$  being the complex potential,  $f = t + TE \log(1 - t/TE)$ ).

A distribution of constant velocity on the greater part of the face and the back is considered, and these velocities are linked by sine-like laws.

The free-shock entrance condition ( $dR_c/dt = 0$  for  $t = 0$ ,  $R_c$  being the radius of curvature and  $t = 0$ , the stagnation point is :

$$\beta_0''/\beta_0' = q_0''/(2q_0') - 1/TE$$

where  $\beta_0$  et  $q_0$  : argument and modulus of the velocity at origin,

$TE$  : transformed of the infinite downstream of the physical plane.

The closing points  $C$  and  $D$  of the cavity are determined by  $\beta(TE) = 0$  and  $\beta_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) t$ .

$$t \rightarrow -\infty$$

By reiterating, the desired profile is rapidly obtained.

#### B) The three-dimensional problem

The span having been fixed, and the aspect-ratio tending towards the infinite, the infinite downstream flow tends towards that created by a simple vortex line (outer problem).

On the other hand, the chord having been fixed and the aspect-ratio tending towards the infinite, the flow near the wing tends towards the two-dimensional flow studied at par. A (inner problem).

There exists a region where, at the second order, the solutions of the inner and outer problems must be identical and both equally valid (in order to match these two solutions). The asymptotical development of the outer problem when  $x \rightarrow 0$ , must be equivalent to that of the inner problem when  $x \rightarrow -\infty$ , which leads to the following conditions :

$$U_\infty = 1/\cos \beta_\infty$$

$$\text{tg}(\beta_\infty) = \alpha(z)$$

$$\beta_1 = -\Gamma(z)/\pi \text{ with } \beta_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\beta - \beta_\infty) t$$

It is thus sufficient to resolve the two-dimensional problem after taking account of these new conditions.

This new result can also be employed in the purely two-dimensional case, by dictating  $\beta_1 = -\Gamma(Z)/\pi$  close to the general condition adopted (see Furuya  $f(TC) = f(TD) - \text{Ref. 2}$ ).